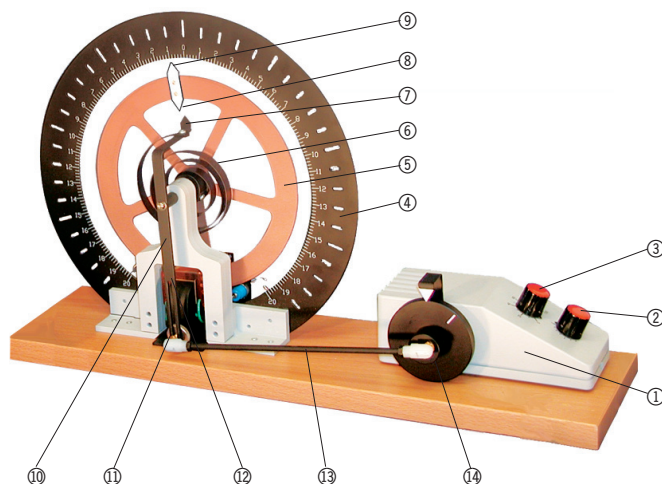


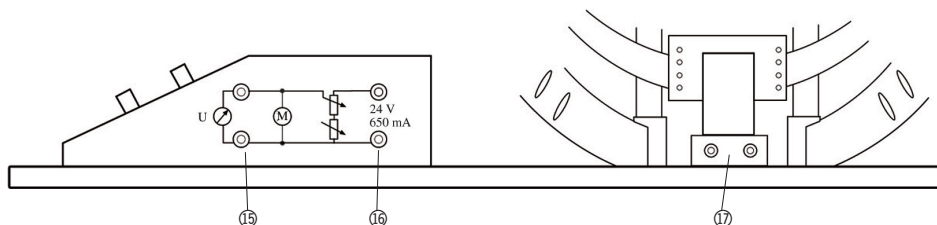
## Drehpendel nach Prof. Pohl 1002956

### Bedienungsanleitung

06/18 ALF



- ① Erregermotor
- ② Drehknopf zur Feineinstellung der Erregerspannung
- ③ Drehknopf zur Grobeinstellung der Erregerspannung
- ④ Skalenring
- ⑤ Pendelkörper
- ⑥ Schneckenfeder
- ⑦ Zeiger zur Phasenlage des Erregers
- ⑧ Zeiger zur Phasenlage des Pendelkörpers
- ⑨ Zeiger für Auslenkung des Pendelkörpers
- ⑩ Erreger
- ⑪ Wirbelstrombremse
- ⑫ Führungsschlitz und Schraube zur Einstellung der Erregeramplitude
- ⑬ Schubstange
- ⑭ Antriebsrad mit Exzenter
- ⑮ 4-mm-Sicherheitsbuchsen zum Messen der Erregerspannung
- ⑯ 4-mm-Sicherheitsbuchsen zur Versorgung des Erregermotors
- ⑰ 4-mm-Sicherheitsbuchsen zur Versorgung der Wirbelstrombremse



Das Drehpendel dient zur Untersuchung von freien, erzwungenen und chaotischen Schwingungen bei verschiedenen Dämpfungen.

#### Versuchsthemen:

- Freie Drehschwingungen bei verschiedenen Dämpfungen (Schwingfall mit mäßiger Dämpfung, aperiodische Schwingung und aperiodischer Grenzfall)
- Erzwungene Schwingungen und deren Resonanzkurven bei verschiedenen Dämpfungen
- Phasenverschiebung zwischen Erreger und Resonator im Resonanzfall
- Chaotische Drehschwingungen
- Statische Bestimmung der Richtgröße  $D$
- Dynamische Bestimmung des Trägheitsmoments  $J$

#### 1. Sicherheitshinweise

- Das Drehpendel bei der Entnahme aus der Verpackung nicht am Skaliering anfassen! Beschädi-

gungsfahr! Entnahme immer mit Entnahmehilfe (Innenverpackung) vornehmen!

- Zum Tragen des Drehpendels Gerät immer an der Grundplatte halten.
- Maximal zulässige Versorgungsspannung des Erregermotors (24 V DC) nicht überschreiten.
- Das Drehpendel keinen unnötigen mechanischen Belastungen aussetzen.

#### 2. Beschreibung, technische Daten

Das Drehpendel nach Prof. Pohl besteht aus einem auf einer hölzernen Grundplatte montiertem schwingenden System und einem Elektromotor. Das schwingende System ist ein kugelgelagertes Kupferrad (5), das über eine Spiralfeder (6), die das rücktreibende Moment liefert, mit dem Erregergestänge verbunden ist. Zur Anregung des Drehpendels dient ein Gleichstrommotor mit grob- und fein einstellbarer Drehzahl, der über einen Exzenter (14) mit Schubstange (13) die Spi-

ralfeder in periodischer Folge auseinanderzieht und zusammendrückt und so das Kupferrad in Schwingung versetzt. Für die Dämpfung wird eine elektromagnetische Wirbelstrombremse (11) verwendet. Ein Skalenring (4) mit Schlitzen und Skala in 2-mm-Teilung umgibt das schwingende System; Zeiger befinden sich an Erreger und Resonator.

Das Gerät kann auch in der Demonstration zur Schattenprojektion verwendet werden.

Eigenfrequenz:	ca. 0,5 Hz.
Erregerfrequenz:	0 bis 1,3 Hz (stufenlos einstellbar)
Anschlüsse:	
Motor:	max. 24 V DC, 0,7 A, über 4-mm-Sicherheitsbuchsen
Wirbelstrombremse:	0 bis 20 V DC, max. 2 A, über 4-mm- Sicherheitsbuchsen
Skalenring:	300 mm Ø
Abmessungen:	400 mm x 140 mm x 270 mm
Masse:	4 kg

### 2.1 Lieferumfang

- 1 Drehpendel
- 2 Zusatzmassen 10 g
- 2 Zusatzmassen 20 g

## 3. Theoretische Grundlagen

### 3.1 Verwendete Formelzeichen

D	= Winkelrichtgröße
J	= Massenträgheitsmoment
M	= Rücktreibendes Drehmoment
T	= Periodendauer
$T_0$	= Periodendauer des ungedämpften Systems
$T_d$	= Periodendauer des gedämpften Systems
$\widehat{M}_E$	= Amplitude des Erreger-Drehmoments
b	= Dämpfungsmoment
n	= Periodenzahl
t	= Zeit
$\Lambda$	= Logarithmisches Dekrement
$\delta$	= Dämpfungskonstante
$\varphi$	= Auslenkwinkel
$\widehat{\varphi}_0$	= Amplitude zur Zeit $t = 0$ s
$\widehat{\varphi}_n$	= Amplitude nach n Perioden
$\widehat{\varphi}_E$	= Erregeramplitude
$\widehat{\varphi}_S$	= Systemamplitude
$\omega_0$	= Eigenfrequenz des schwingenden Systems
$\omega_d$	= Eigenfrequenz des gedämpften Systems
$\omega_E$	= Erregerkreisfrequenz
$\omega_{E \text{ res}}$	= Erregerkreisfrequenz für max. Amplitude
$\Psi_{0S}$	= Systemnullphasenwinkel

### 3.2 Harmonische Drehschwingung

Eine harmonische Schwingung liegt vor, wenn die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist. Bei harmonischen Drehschwingungen ist das rück-

treibende Drehmoment proportional zum Auslenkwinkel  $\varphi$ :

$$M = D \cdot \varphi$$

Der Proportionalitätsfaktor D (Winkelrichtgröße) lässt sich durch Messung des Auslenkwinkels und des auslenkenden Moments errechnen.

Die Eigenkreisfrequenz des Systems  $\omega_0$  ergibt sich nach Messung der Periodendauer T aus

$$\omega_0 = 2 \pi / T$$

und das Massenträgheitsmoment J aus

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}$$

### 3.3 Freie gedämpfte Drehschwingung

Bei einem schwingenden System, bei dem durch Reibungsverluste Energie verloren geht, ohne dass diese durch von außen zugeführte Energie kompensiert wird, verringert sich die Amplitude ständig, d.h. die Schwingung ist gedämpft.

Dabei ist das Dämpfungsmoment b proportional zur Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$ .

Aus dem Drehmoment-Gleichgewicht ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = 0$$

Für die ungedämpfte Schwingung ist  $b = 0$ . Beginnt die Schwingung zur Zeit  $t = 0$  s mit der maximalen Amplitude  $\widehat{\varphi}_0$  ergibt sich die Lösung der Differentialgleichung bei einer nicht zu starken Dämpfung ( $\delta^2 < \omega_0^2$ ) (Schwingfall)

$$\varphi = \widehat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

$\delta = b/2J$  ist die Dämpfungskonstante und

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

die Eigenfrequenz des gedämpften Systems.

Bei einer starken Dämpfung ( $\delta^2 > \omega_0^2$ ) schwingt das System nicht, sondern kriecht in die Ruhelage (Kriechfall).

Die Periodendauer  $T_d$  des gedämpft schwingenden Systems ändert sich gegenüber  $T_0$  des ungedämpft schwingenden Systems bei nicht zu starker Dämpfung nur geringfügig.

Durch Einsetzen von  $t = n \cdot T_d$  in die Gleichung

$$\varphi = \widehat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

und für die Amplitude nach n Perioden  $\varphi = \widehat{\varphi}_n$  erhält man mit der Beziehung  $\omega_d = 2 \pi / T_d$

$$\frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_0} = e^{-n \cdot \delta \cdot T_d}$$

und daraus das logarithmische Dekrement  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \delta \cdot T_d = \frac{1}{n} \cdot \ln \left[ \frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_0} \right] = \ln \left[ \frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_{n+1}} \right]$$

Durch Einsetzen von  $\delta = \Lambda / T_d$ ,  $\omega_0 = 2\pi / T_0$  und  $\omega_d = 2\pi / T_d$  in die Gleichung

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

erhält man:

$$T_d = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}$$

womit sich die Periodendauer  $T_d$  genau berechnen lässt, wenn  $T_0$  bekannt ist.

### 3.4 Erzwungene Drehschwingung

Bei erzwungenen Drehschwingungen wirkt von außen ein periodisch mit einer Sinusfunktion veränderliches Drehmoment auf das schwingende System. In der Bewegungsgleichung ist dieses Erregermoment zu ergänzen

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = \widehat{M}_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t)$$

Nach einer Einschwingzeit schwingt das Drehpendel in einem stationären Zustand mit derselben Kreisfrequenz wie der Erreger, dabei kann  $\omega_E$  noch gegen  $\omega_0$  phasenverschoben sein.  $\Psi_{05}$  ist der System-Nullphasenwinkel, die Phasenverschiebung zwischen dem schwingenden System und dem Erreger.

$$\varphi = \widehat{\varphi}_S \cdot \sin(\omega_E \cdot t - \Psi_{05})$$

Für die Systemamplitude  $\widehat{\varphi}_S$  gilt

$$\widehat{\varphi} = \frac{\widehat{M}_E}{J \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \cdot \omega_E^2}}$$

Für das Verhältnis von Systemamplitude zu Erregeramplitude gilt

$$\frac{\widehat{\varphi}_S}{\widehat{\varphi}_E} = \frac{\widehat{M}_E}{J \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2}}$$

Bei ungedämpften Schwingungen steigt die Amplitude im Resonanzfall ( $\omega_E$  gleich  $\omega_0$ ) theoretisch unendlich an und führt zur „Resonanzkatastrophe“.

Bei gedämpften Schwingungen und nicht zu starker Dämpfung wird die Systemamplitude maximal, wobei die Erregerkreisfrequenz  $\omega_{E, \text{res}}$  kleiner ist als die Eigenkreisfrequenz des Systems. Diese Frequenz ergibt sich aus

$$\omega_{E, \text{res}} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}}$$

Bei starker Dämpfung gibt es keine Amplitudenüberhöhung.

Für den System-Nullphasenwinkel  $\Psi_{05}$  gilt

$$\Psi_{05} = \arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Für  $\omega_E = \omega_0$  (Resonanz) ist der System-Nullphasenwinkel  $\Psi_{05} = 90^\circ$ . Dies gilt auch für  $\delta = 0$  mit entsprechendem Grenzübergang.

Bei gedämpften Schwingungen ( $\delta > 0$ ) und  $\omega_E < \omega_0$  ergibt sich  $0^\circ \leq \Psi_{05} \leq 90^\circ$ , für  $\omega_E > \omega_0$  gilt  $90^\circ \leq \Psi_{05} \leq 180^\circ$ .

Bei ungedämpften Schwingungen ( $\delta = 0$ ) gilt  $\Psi_{05} = 0^\circ$  bei  $\omega_E < \omega_0$  und  $\Psi_{05} = 180^\circ$  für  $\omega_E > \omega_0$ .

## 4. Bedienung

### 4.1 Freie gedämpfte Drehschwingung

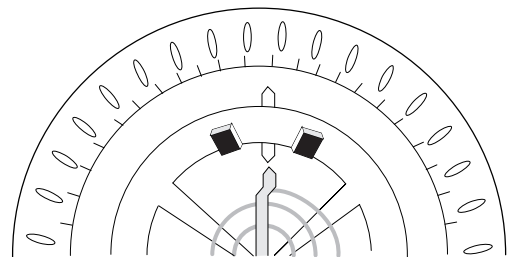
- Wirbelstrombremse mit dem Ausgang für einstellbare Spannung des Drehpendel-Netzgeräts verbinden.
- Amperemeter in den Stromkreis schalten.
- Dämpfungskonstante in Abhängigkeit vom Strom bestimmen.

### 4.2 Erzwungene Drehschwingung

- Anschlussbuchsen (16) des Erregermotors mit dem Festspannungsausgang des Drehpendel-Netzgeräts verbinden.
- Voltmeter mit den Anschlussbuchsen (15) des Erregermotors verbinden.
- Bestimmung der Schwingungsamplitude in Abhängigkeit der Erregerfrequenz bzw. der Versorgungsspannung.
- Bei Bedarf Wirbelstrombremse mit dem Ausgang für einstellbare Spannung des Drehpendel-Netzgeräts verbinden.

### 4.3 Chaotische Schwingungen

- Zur Erzeugung chaotischer Schwingungen stehen 4 Zusatzmassen zur Verfügung, die das lineare Rückstellmoment des Drehpendels verändern.
- Dazu Zusatzmasse am Pendelkörper (5) anschrauben.



## 5. Versuchsbeispiele

### 5.1 Freie gedämpfte Drehschwingung

- Zur Bestimmung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  werden die Amplituden in mehrfachen Durchläufen gemessen und gemittelt. Dazu werden in zwei Messreihen die Ausschläge des Drehpendels auf der Skala jeweils links und rechts abgelesen.
- Der Startpunkt des Pendelkörpers lag bei 15 bzw. -15 auf der Skala. Fünf Ausschläge wurden abgelesen.
- Aus dem Verhältnis der Amplituden ergibt sich  $\Lambda$  nach der Formel

$$\Lambda = \ln \left[ \frac{\hat{\varphi}_n}{\hat{\varphi}_{n+1}} \right]$$

n	$\hat{\varphi} -$				$\hat{\varphi} +$			
0	-15	-15	-15	-15	15	15	15	15
1	-14,8	-14,8	-14,8	-14,8	14,8	14,8	14,8	14,8
2	-14,4	-14,6	-14,4	-14,6	14,4	14,4	14,6	14,4
3	-14,2	-14,4	-14,0	-14,2	14,0	14,2	14,2	14,0
4	-13,8	-14,0	-13,6	-14,0	13,8	13,8	14,0	13,8
5	-13,6	-13,8	-13,4	-13,6	13,4	13,4	13,6	13,6

n	$\emptyset \hat{\varphi} -$	$\emptyset \hat{\varphi} +$	$\Lambda -$	$\Lambda +$
0	-15	15		
1	-14,8	14,8	0,013	0,013
2	-14,5	14,5	0,02	0,02
3	-14,2	14,1	0,021	0,028
4	-13,8	13,8	0,028	0,022
5	-13,6	13,5	0,015	0,022

- Der gemittelte Wert für  $\Lambda$  beträgt  $\Lambda = 0,0202$ .
- Für die Schwingungsdauer  $T$  des Pendels gilt  $t = n \cdot T$ . Dazu die Zeit für 10 Schwingungen mit einer Stoppuhr messen und  $T$  berechnen.

$$T = 1,9 \text{ s}$$

- Aus diesen Werten lässt sich die Dämpfungskonstante  $\delta$  mit  $\delta = \Lambda / T$  bestimmen.

$$\delta = 0,0106 \text{ s}^{-1}$$

- Für die Eigenfrequenz  $\omega$  gilt

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \delta^2}$$

$$\omega = 3,307 \text{ Hz}$$

### 5.2 Freie gedämpfte Drehschwingung

- Zur Bestimmung der Dämpfungskonstante  $\delta$  in Abhängigkeit vom Strom  $I$  durch den Elektromagneten wurde der gleiche Versuch mit zugeschalteter Wirbelstrombremse bei  $I = 0,2 \text{ A}$ ,  $0,4 \text{ A}$  und  $0,6 \text{ A}$  durchgeführt.

#### $I = 0,2 \text{ A}$

n	$\hat{\varphi} -$				$\emptyset \hat{\varphi} -$	$\Lambda -$
0	-15	-15	-15	-15	-15	
1	-13,6	-13,8	-13,8	-13,6	-13,7	0,0906
2	-12,6	-12,8	-12,6	-12,4	-12,6	0,13
3	-11,4	-11,8	-11,6	-11,4	-11,5	0,0913
4	-10,4	-10,6	-10,4	-10,4	-10,5	0,0909
5	9,2	-9,6	-9,6	-9,6	-9,5	0,1

- Bei  $T = 1,9 \text{ s}$  und gemitteltem  $\Lambda = 0,1006$  ergibt sich die Dämpfungskonstante:  $\delta = 0,053 \text{ s}^{-1}$

#### $I = 0,4 \text{ A}$

n	$\hat{\varphi} -$				$\emptyset \hat{\varphi} -$	$\Lambda -$
0	-15	-15	-15	-15	-15	
1	-11,8	-11,8	-11,6	-11,6	-11,7	0,248
2	-9,2	-9,0	-9,0	-9,2	-9,1	0,25
3	-7,2	-7,2	-7,0	-7,0	-7,1	0,248
4	-5,8	-5,6	-5,4	-5,2	-5,5	0,25
5	-4,2	-4,2	-4,0	-4,0	-4,1	0,29

- Bei  $T = 1,9 \text{ s}$  und gemitteltem  $\Lambda = 0,257$  ergibt sich die Dämpfungskonstante:  $\delta = 0,135 \text{ s}^{-1}$

#### $I = 0,6 \text{ A}$

n	$\hat{\varphi} -$				$\emptyset \hat{\varphi} -$	$\Lambda -$
0	-15	-15	-15	-15	-15	
1	-9,2	-9,4	-9,2	-9,2	-9,3	0,478
2	-5,4	-5,2	-5,6	-5,8	-5,5	0,525
3	-3,2	-3,2	-3,2	-3,4	-3,3	0,51
4	-1,6	-1,8	-1,8	-1,8	-1,8	0,606
5	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	0,81

- Bei  $T = 1,9 \text{ s}$  und gemitteltem  $\Lambda = 0,5858$  ergibt sich die Dämpfungskonstante:  $\delta = 0,308 \text{ s}^{-1}$

### 5.3 Erzwungene Drehschwingung

- Zur Bestimmung der Schwingungsamplitude in Abhängigkeit der Erregerfrequenz bzw. der Versorgungsspannung wird der maximale Ausschlag des Pendelkörpers abgelesen.

#### $T = 1,9 \text{ s}$

Motorspannung V	$\hat{\varphi}$
3	0,8
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	3,3
7,6	20,0
8	16,8
9	1,6
10	1,1

- Die Eigenkreisfrequenz des Systems  $\omega_0$  ergibt sich nach Messung der Periodendauer T aus  

$$\omega_0 = 2 \pi / T = 3,3069 \text{ Hz}$$
- Bei einer Motorspannung von 7,6 V findet die größte Auslenkung statt, d.h. der Resonanzfall tritt ein.
- Dann wurde der gleiche Versuch mit zugeschalteter Wirbelstrombremse bei  $I = 0,2 \text{ A}$ ,  $0,4 \text{ A}$  und  $0,6 \text{ A}$  durchgeführt.

5	1,3
6	1,8
7	3,6
7,6	7,4
8	3,6
9	1,6
10	1,0

#### I = 0,2 A

Motorspannung V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,7
7	2,9
7,6	15,2
8	4,3
9	1,8
10	1,1

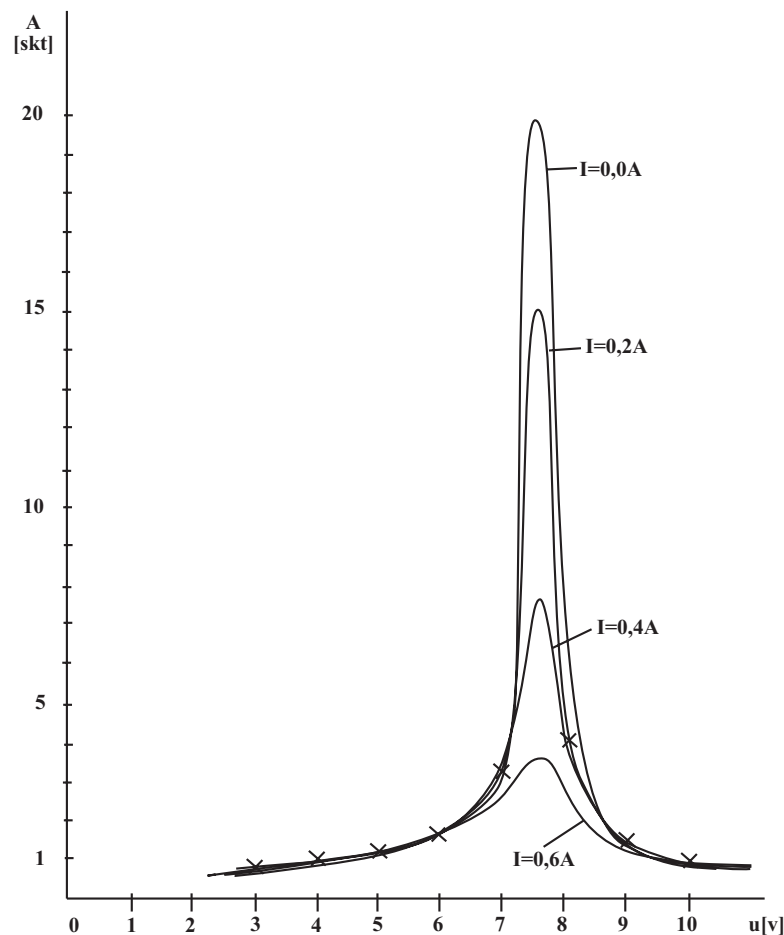
#### I = 0,6 A

Motorspannung V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	2,8
7,6	3,6
8	2,6
9	1,3
10	1,0

#### I = 0,4 A

Motorspannung V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1

- Aus diesen Messungen lassen sich die Resonanzkurven grafisch darstellen, indem man die Amplituden in Abhängigkeit zur Motorspannung aufträgt.
- Aus der Halbwertsbreite des Grafen kann die Resonanzfrequenz grafisch ermittelt werden.

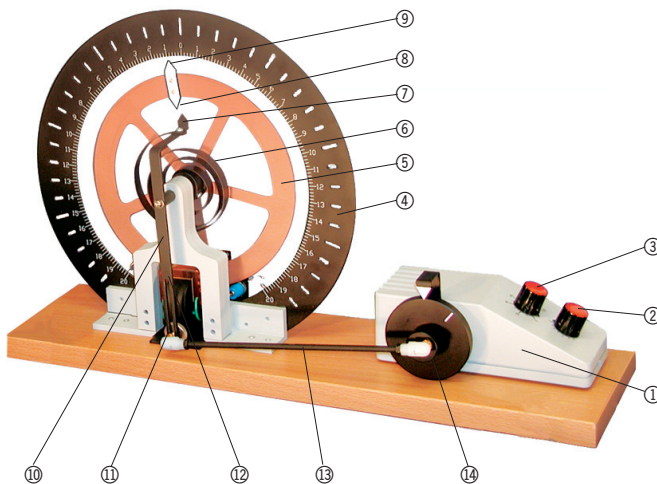


Resonanzkurven

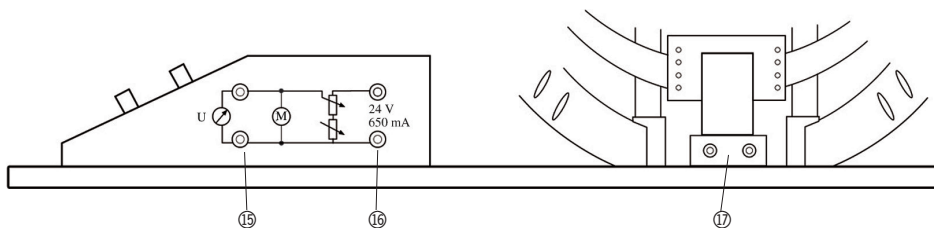
## Torsion Pendulum According to Prof. Pohl 1002956

### Operating instructions

06/18 ALF



- ① Exciter motor
- ② Control knob for fine adjustment of the exciter voltage
- ③ Control knob for coarse adjustment of the exciter voltage
- ④ Scale ring
- ⑤ Pendulum body
- ⑥ Coil spring
- ⑦ Pointer for the exciter phase angle
- ⑧ Pointer for the pendulum's phase angle
- ⑨ Pointer for the pendulum's deflection
- ⑩ Exciter
- ⑪ Eddy current brake
- ⑫ Guide slot and screw to set the exciter amplitude
- ⑬ Connecting rod
- ⑭ Eccentric drive wheel
- ⑮ 4-mm safety socket for exciter voltage measurement
- ⑯ 4-mm safety sockets for the exciter motor power supply
- ⑰ 4-mm safety sockets for the eddy current brake power supply



The torsion pendulum may be used to investigate free, forced and chaotic oscillations with various degrees of damping.

#### Experiment topics:

- Free rotary oscillations at various degrees of damping (oscillations with light damping, aperiodic oscillation and aperiodic limit)
- Forced rotary oscillations and their resonance curves at various degrees of damping
- Phase displacement between the exciter and resonator during resonance
- Chaotic rotary oscillations
- Static determination of the direction variable  $D$
- Dynamic determination of the moment of inertia  $J$

#### 1. Safety instructions

- When removing the torsional pendulum from the packaging do not touch the scale ring. This could

lead to damage. Always remove using the handles provided in the internal packaging.

- When carrying the torsional pendulum always hold it by the base plate.
- Never exceed the maximum permissible supply voltage for the exciter motor (24 V DC).
- Do not subject the torsional pendulum to any unnecessary mechanical stress.

#### 2. Description, technical data

The Professor Pohl torsional pendulum consists of a wooden base plate with an oscillating system and an electric motor mounted on top. The oscillating system is a ball-bearing mounted copper wheel (5), which is connected to the exciter rod via a coil spring (6) that provides the restoring torque. A DC motor with coarse and fine speed adjustment is used to excite the torsional pendulum. Excitement is brought about via an eccentric wheel (14) with connecting rod (13) which

unwinds the coil spring then compresses it again in a periodic sequence and thereby initiates the oscillation of the copper wheel. The electromagnetic eddy current brake (11) is used for damping. A scale ring (4) with slots and a scale in 2-mm divisions extends over the outside of the oscillating system; indicators are located on the exciter and resonator. The device can also be used in shadow projection demonstrations.

Natural frequency: 0.5 Hz approx.  
 Exciter frequency: 0 to 1.3 Hz (continuously adjustable)  
 Terminals:  
 Motor: max. 24 V DC, 0.7 A, via 4-mm safety sockets  
 Eddy current brake: 0 to 20 V DC, max. 2 A, via 4-mm safety sockets  
 Scale ring: 300 mm Ø  
 Dimensions: 400 mm x 140 mm x 270 mm  
 Ground: 4 kg

## 2.1 Scope of supply

1 Torsional pendulum  
 2 Additional 10 g weights  
 2 Additional 20 g weights

## 3. Theoretical Fundamentals

### 3.1 Symbols used in the equations

D = Angular directional variable  
 J = Mass moment of inertia  
 M = Restoring torque  
 T = Period  
 $T_0$  = Period of an undamped system  
 $T_d$  = Period of the damped system  
 $\hat{M}_E$  = Amplitude of the exciter moment  
 b = Damping torque  
 n = Frequency  
 t = Time  
 $\Lambda$  = Logarithmic decrement  
 $\delta$  = Damping constant  
 $\varphi$  = Angle of deflection  
 $\hat{\varphi}_0$  = Amplitude at time  $t = 0$  s  
 $\hat{\varphi}_n$  = Amplitude after n periods  
 $\hat{\varphi}_E$  = Exciter amplitude  
 $\hat{\varphi}_S$  = System amplitude  
 $\omega_0$  = Natural frequency of the oscillating system  
 $\omega_d$  = Natural frequency of the damped system  
 $\omega_E$  = Exciter angular frequency  
 $\omega_{E \text{ res}}$  = Exciter angular frequency for max. amplitude  
 $\Psi_{0S}$  = System zero phase angle

### 3.2 Harmonic rotary oscillation

A harmonic oscillation is produced when the restoring torque is proportional to the deflection. In the case of

harmonic rotary oscillations the restoring torque is proportional to the deflection angle  $\varphi$ :

$$M = D \cdot \varphi$$

The coefficient of proportionality D (angular direction variable) can be computed by measuring the deflection angle and the deflection moment.

If the period duration T is measured, the natural resonant frequency of the system  $\omega_0$  is given by

$$\omega_0 = 2 \pi / T$$

and the mass moment of inertia J is given by

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}$$

### 3.3 Free damped rotary oscillations

An oscillating system that suffers energy loss due to friction, without the loss of energy being compensated for by any additional external source, experiences a constant drop in amplitude, i.e. the oscillation is damped.

At the same time the damping torque b is proportional to the deflection angle  $\varphi$ .

The following motion equation is obtained for the torque at equilibrium

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = 0$$

$b = 0$  for undamped oscillation.

If the oscillation begins with maximum amplitude  $\hat{\varphi}_0$  at  $t = 0$  s the resulting solution to the differential equation for light damping ( $\delta^2 < \omega_0^2$ ) (oscillation) is as follows

$$\varphi = \hat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

$\delta = b/2J$  is the damping constant and

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

the natural frequency of the damped system.

Under heavy damping ( $\delta^2 > \omega_0^2$ ) the system does not oscillate but moves directly into a state of rest or equilibrium (non-oscillating case).

The period duration  $T_d$  of the lightly damped oscillating system varies only slightly from  $T_0$  of the undamped oscillating system if the damping is not excessive.

By inserting  $t = n \cdot T_d$  into the equation

$$\varphi = \hat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

and  $\varphi = \hat{\varphi}_n$  for the amplitude after n periods we obtain the following with the relationship  $\omega_d = 2 \pi / T_d$

$$\frac{\hat{\varphi}_n}{\hat{\varphi}_0} = e^{-n \cdot \delta \cdot T_d}$$

and thus from this the logarithmic decrement  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \delta \cdot T_d = \frac{1}{n} \cdot \ln \left[ \frac{\hat{\varphi}_n}{\hat{\varphi}_0} \right] = \ln \left[ \frac{\hat{\varphi}_n}{\hat{\varphi}_{n+1}} \right]$$

By inserting  $\delta = \Lambda / T_d$ ,  $\omega_0 = 2\pi / T_0$  and  $\omega_d = 2\pi / T_d$  into the equation

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

we obtain:

$$T_d = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}$$

whereby the period  $T_d$  can be calculated precisely provided that  $T_0$  is known.

### 3.4 Forced oscillations

In the case of forced oscillations a rotating motion with sinusoidally varying torque is externally applied to the system. This exciter torque can be incorporated into the motion equation as follows:

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = \widehat{M}_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t)$$

After a transient or settling period the torsion pendulum oscillates in a steady state with the same angular frequency as the exciter, at the same time  $\omega_E$  can still be phase displaced with respect to  $\omega_0$ .  $\Psi_{0S}$  is the system's zero-phase angle, the phase displacement between the oscillating system and the exciter.

$$\varphi = \widehat{\varphi}_S \cdot \sin(\omega_E \cdot t - \Psi_{0S})$$

The following holds true for the system amplitude  $\widehat{\varphi}_S$

$$\widehat{\varphi} = \frac{\widehat{M}_E}{J \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \cdot \omega_E^2}}$$

The following holds true for the ratio of system amplitude to the exciter amplitude

$$\frac{\widehat{\varphi}_S}{\widehat{\varphi}_E} = \frac{\widehat{M}_E}{J \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2}}$$

In the case of undamped oscillations, theoretically speaking the amplitude for resonance ( $\omega_E$  equal to  $\omega_0$ ) increases infinitely and can lead to "catastrophic resonance".

In the case of damped oscillations with light damping the system amplitude reaches a maximum where the exciter's angular frequency  $\omega_{Eres}$  is lower than the system's natural frequency. This frequency is given by

$$\omega_{Eres} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}}$$

Stronger damping does not result in excessive amplitude.

For the system's zero phase angle  $\Psi_{0S}$  the following is true:

$$\Psi_{0S} = \arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega_\omega^2}\right)$$

For  $\omega_E = \omega_0$  (resonance case) the system's zero-phase angle is  $\Psi_{0S} = 90^\circ$ . This is also true for  $\delta = 0$  and the oscillation passes its limit at this value.

In the case of damped oscillations ( $\delta > 0$ ) where  $\omega_E < \omega_0$ , we find that  $0^\circ \leq \Psi_{0S} \leq 90^\circ$  and when  $\omega_E > \omega_0$  it is found that  $90^\circ \leq \Psi_{0S} \leq 180^\circ$ .

In the case of undamped oscillations ( $\delta = 0$ ),  $\Psi_{0S} = 0^\circ$  for  $\omega_E < \omega_0$  and  $\Psi_{0S} = 180^\circ$  for  $\omega_E > \omega_0$ .

## 4. Operation

### 4.1 Free damped rotary oscillations

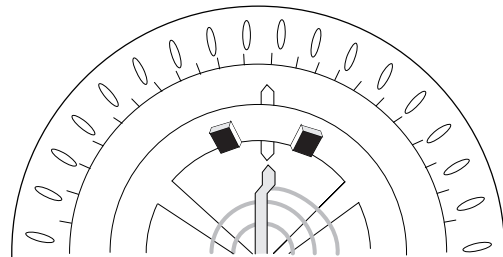
- Connect the eddy current brake to the variable voltage output of the DC power supply for torsion pendulum.
- Connect the ammeter into the circuit.
- Determine the damping constant as a function of the current.

### 4.2 Forced oscillations

- Connect the fixed voltage output of the DC power supply for the torsion pendulum to the sockets (16) of the exciter motor.
- Connect the voltmeter to the sockets (15) of the exciter motor.
- Determine the oscillation amplitude as a function of the exciter frequency and of the supply voltage.
- If needed connect the eddy current brake to the variable voltage output of the DC power supply for the torsion pendulum.

### 4.3 Chaotic oscillations

- To generate chaotic oscillations there are 4 supplementary weights at your disposal which alter the torsion pendulum's linear restoring torque.
- To do this screw the supplementary weight to the body of the pendulum (5).





## 5. Example experiments

### 5.1 Free damped rotary oscillations

- To determine the logarithmic decrement  $\Lambda$ , the amplitudes are measured and averaged out over several runs. To do this the left and right deflections of the torsional pendulum are read off the scale in two sequences of measurements.
- The starting point of the pendulum body is located at +15 or -15 on the scale. Take the readings for five deflections.
- From the ratio of the amplitudes we obtain  $\Lambda$  using the following equation

$$\Lambda = \ln \left[ \frac{\hat{\varphi}_n}{\hat{\varphi}_{n+1}} \right]$$

n	$\hat{\varphi} -$				$\hat{\varphi} +$			
	0	-15	-15	-15	-15	15	15	15
1	-14.8	-14.8	-14.8	-14.8	14.8	14.8	14.8	14.8
2	-14.4	-14.6	-14.4	-14.6	14.4	14.4	14.6	14.4
3	-14.2	-14.4	-14.0	-14.2	14.0	14.2	14.2	14.0
4	-13.8	-14.0	-13.6	-14.0	13.8	13.8	14.0	13.8
5	-13.6	-13.8	-13.4	-13.6	13.4	13.4	13.6	13.6

n	$\emptyset \hat{\varphi} -$	$\emptyset \hat{\varphi} +$	$\Lambda -$	$\Lambda +$
0	-15	15		
1	-14.8	14.8	0.013	0.013
2	-14.5	14.5	0.02	0.02
3	-14.2	14.1	0.021	0.028
4	-13.8	13.8	0.028	0.022
5	-13.6	13.5	0.015	0.022

- The average value for  $\Lambda$  comes to  $\Lambda = 0.0202$ .
- For the pendulum oscillation period  $T$  the following is true:  $t = n \cdot T$ . To measure this, record the time for 10 oscillations using a stop watch and calculate  $T$ .

$$T = 1.9 \text{ s}$$

- From these values the damping constant  $\delta$  can be determined from  $\delta = \Lambda / T$ .

$$\delta = 0.0106 \text{ s}^{-1}$$

- For the natural frequency  $\omega$  the following holds true

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \delta^2}$$

$$\omega = 3.307 \text{ Hz}$$

### 5.2 Free damped rotary oscillations

- To determine the damping constant  $\delta$  as a function of the current  $I$  flowing through the electromagnets the same experiment is conducted with an eddy current brake connected at currents of  $I = 0.2 \text{ A}$ ,  $0.4 \text{ A}$  and  $0.6 \text{ A}$ .

### I = 0.2 A

n	$\hat{\varphi} -$				$\emptyset \hat{\varphi} -$	$\Lambda -$
	0	-15	-15	-15	-15	-15
1	-13.6	-13.8	-13.8	-13.6	-13.7	0.0906
2	-12.6	-12.8	-12.6	-12.4	-12.6	0.13
3	-11.4	-11.8	-11.6	-11.4	-11.5	0.0913
4	-10.4	-10.6	-10.4	-10.4	-10.5	0.0909
5	9.2	-9.6	-9.6	-9.6	-9.5	0.1

- For  $T = 1.9 \text{ s}$  and the average value of  $\Lambda = 0.1006$  we obtain the damping constant:  $\delta = 0.053 \text{ s}^{-1}$

### I = 0.4 A

n	$\hat{\varphi} -$				$\emptyset \hat{\varphi} -$	$\Lambda -$
	0	-15	-15	-15	-15	-15
1	-11.8	-11.8	-11.6	-11.6	-11.7	0.248
2	-9.2	-9.0	-9.0	-9.2	-9.1	0.25
3	-7.2	-7.2	-7.0	-7.0	-7.1	0.248
4	-5.8	-5.6	-5.4	-5.2	-5.5	0.25
5	-4.2	-4.2	-4.0	-4.0	-4.1	0.29

- For  $T = 1.9 \text{ s}$  and an average value of  $\Lambda = 0.257$  we obtain the damping constant:  $\delta = 0.135 \text{ s}^{-1}$

### I = 0.6 A

n	$\hat{\varphi} -$				$\emptyset \hat{\varphi} -$	$\Lambda -$
	0	-15	-15	-15	-15	-15
1	-9.2	-9.4	-9.2	-9.2	-9.3	0.478
2	-5.4	-5.2	-5.6	-5.8	-5.5	0.525
3	-3.2	-3.2	-3.2	-3.4	-3.3	0.51
4	-1.6	-1.8	-1.8	-1.8	-1.8	0.606
5	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	0.81

- For  $T = 1.9 \text{ s}$  and an average value of  $\Lambda = 0.5858$  we obtain the damping constant:  $\delta = 0.308 \text{ s}^{-1}$

### 5.3 Forced rotary oscillation

- Take a reading of the maximum deflection of the pendulum body to determine the oscillation amplitude as a function of the exciter frequency or the supply voltage.

### T = 1.9 s

Motor voltage V	$\hat{\varphi}$
3	0.8
4	1.1
5	1.2
6	1.6
7	3.3
7.6	20.0
8	16.8
9	1.6
10	1.1

- After measuring the period T the natural frequency of the system  $\omega_0$  can be obtained from  

$$\omega_0 = 2 \pi/T = 3.3069 \text{ Hz}$$
- The most extreme deflection arises at a motor voltage of 7.6 V, i.e. the resonance case occurs.
- Then the same experiment is performed with an eddy current brake connected at currents of  $I = 0.2 \text{ A}$ ,  $0.4 \text{ A}$  and  $0.6 \text{ A}$ .

**I = 0.2 A**

Motor voltage V	$\hat{\varphi}$
3.0	0.9
4.0	1.1
5.0	1.2
6.0	1.7
7.0	2.9
7.6	15.2
8.0	4.3
9.0	1.8
10.0	1.1

**I = 0.4 A**

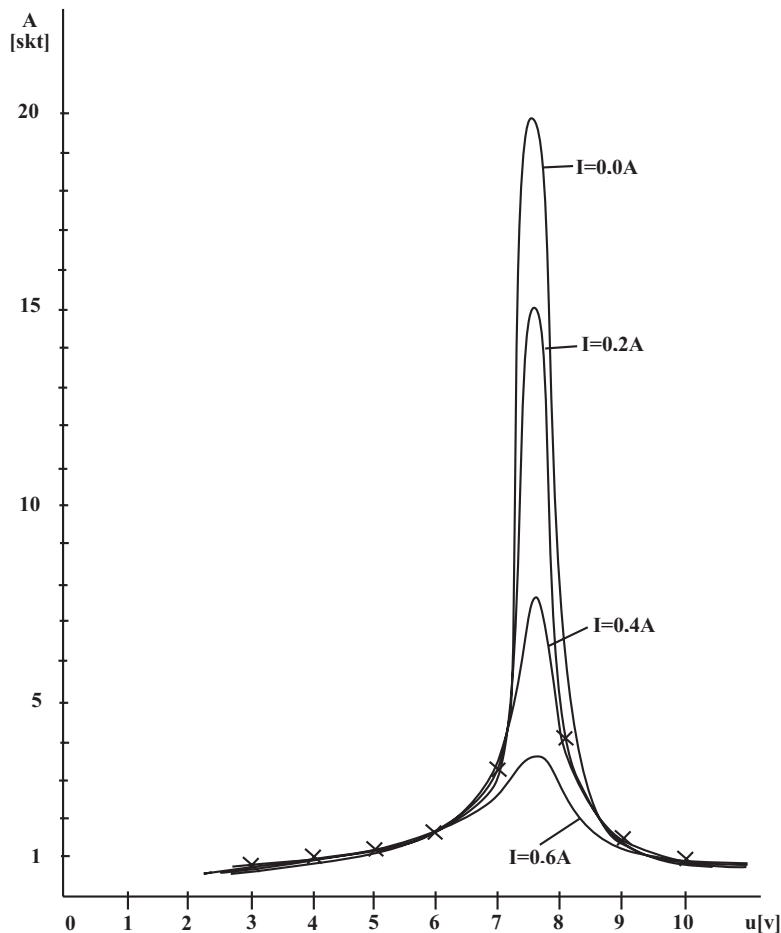
Motor voltage V	$\hat{\varphi}$
3.0	0.9
4.0	1.1

5.0	1.3
6.0	1.8
7.0	3.6
7.6	7.4
8.0	3.6
9.0	1.6
10.0	1.0

**I = 0.6 A**

Motor voltage V	$\hat{\varphi}$
3.0	0.9
4.0	1.1
5.0	1.2
6.0	1.6
7.0	2.8
7.6.0	3.6
8.0	2.6
9.0	1.3
10.0	1.0

- From these measurements the resonance curves can be plotted in a graph depicting the amplitudes against the motor voltage.
- The resonant frequency can be determined by finding the half-width value from the graph.

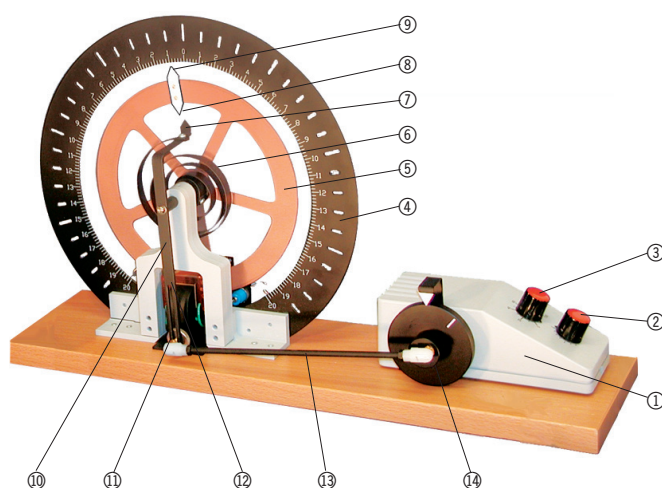


Resonance curves

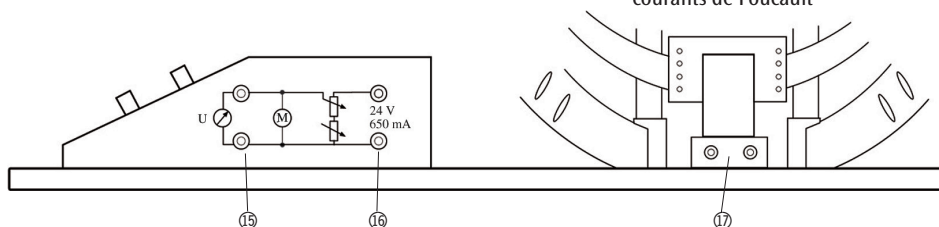
## Pendule tournant d'après Prof. Pohl 1002956

### Instructions d'utilisation

06/18 ALF



- ① Moteur excitateur
- ② Bouton tournant pour le réglage fin de la tension d'excitation
- ③ Bouton tournant pour le réglage grossier de la tension d'excitation
- ④ Bague graduée
- ⑤ Corps du pendule
- ⑥ Ressort conique
- ⑦ Pointeur indiquant la phase de l'excitateur
- ⑧ Pointeur indiquant la phase du corps du pendule
- ⑨ Pointeur indiquant la déviation du corps du pendule
- ⑩ Excitateur
- ⑪ Frein à courants de Foucault
- ⑫ Fente de guidage et vis pour le réglage de l'amplitude d'excitation
- ⑬ Barre de traction
- ⑭ Roue d'entraînement à excentrique
- ⑮ Douilles de sécurité de 4 mm pour la mesure de la tension d'excitation
- ⑯ Douilles de sécurité de 4 mm pour l'alimentation du moteur excitateur
- ⑰ Douilles de sécurité de 4 mm pour l'alimentation du frein à courants de Foucault



Le pendule tournant sert à l'analyse d'oscillations libres, forcées et chaotiques en présence de différents amortissements.

#### Thèmes des expériences :

- Libres oscillations tournantes avec différents amortissements (oscillations avec amortissement modéré, oscillation aperiodique et cas limite aperiodique)
- Oscillations forcées et ses courbes de résonance avec différents amortissements
- Déphasage entre l'excitateur et le résonateur en cas de résonance
- Oscillations tournantes chaotiques
- Détermination statique de la grandeur directionnelle  $D$
- Détermination dynamique du moment d'inertie  $J$

#### 1. Consignes de sécurité

- Lorsque vous retirez le pendule de l'emballage, ne

le saisissez pas à hauteur de la bague graduée ! Risque d'endommagement ! Retirez-le toujours en saisissant l'emballage intérieur.

- Pour porter le pendule, tenez toujours l'appareil par la plaque de base.
- Ne pas dépasser la tension d'alimentation maximum admissible du moteur excitateur de 24 V CC.
- Ne pas exposer le pendule à des charges mécaniques inutiles.

#### 2. Description, caractéristiques techniques

Le pendule tournant d'après Prof. Pohl est constitué d'un système oscillant monté sur une plaque de base en bois et d'un moteur électrique. Le système oscillant est constitué d'une roue en cuivre (5) montée sur un roulement à billes qui est reliée à la barre de l'excitateur par un ressort spiral (6) fournissant le couple de rappel. Le pendule est excité par un moteur à courant continu à vitesse réglage (réglages grossier et fin) qui, par l'action d'un excentrique (14) à barre de

traction (13), étire et comprime régulièrement le ressort spiral et fait ainsi osciller la roue en cuivre. Un frein électromagnétique à courants de Foucault (11) est utilisé pour l'amortissement. Une bague graduée (4) à fentes et graduation en pas de 2 mm entoure le système oscillant ; l'excitateur et le résonateur sont pourvus de pointeurs.

L'appareil peut aussi être utilisé en démonstration pour la projection d'ombres.

Fréquence propre :	env. 0,5 Hz.
Fréquence d'excitateur :	0 à 1,3 Hz (réglable en continu)
Connexions :	
Moteur :	max. 24 V CC, 0,7 A, douilles de sécurité de 4 mm
Frein à courants de Foucault :	0 à 20 V CC, max. 2 A, douilles de sécurité de 4 mm
Bague graduée :	Ø 300 mm
Dimensions :	400 mm x 140 mm x 270 mm
Masse :	4 kg

## 2.1 Matériel fourni

- 1 pendule tournant
- 2 masses supplémentaires de 10 g
- 2 masses supplémentaires de 20 g

## 3. Notions théoriques

### 3.1 Symboles utilisés dans les formules

D	=	grandeur directionnelle angulaire
J	=	moment d'inertie de masse
M	=	couple de rappel
T	=	durée d'une période
T <sub>0</sub>	=	durée d'une période du système non amorti
T <sub>d</sub>	=	durée d'une période du système amorti
$\widehat{M}_E$	=	amplitude du couple de l'excitateur
b	=	couple d'amortissement
n	=	nombre de périodes
t	=	temps
$\Lambda$	=	décroissement logarithmique
$\delta$	=	constante d'amortissement
$\varphi$	=	angle de déviation
$\widehat{\varphi}_0$	=	amplitude au temps t = 0 s
$\widehat{\varphi}_n$	=	amplitude après n périodes
$\widehat{\varphi}_E$	=	amplitude de l'excitateur
$\widehat{\varphi}_S$	=	amplitude du système
$\omega_0$	=	propre fréquence du système oscillant
$\omega_d$	=	propre fréquence du système amorti
$\omega_E$	=	fréquence angulaire de l'excitateur
$\omega_{E \text{ res}}$	=	fréquence angulaire de l'excitateur pour l'amplitude max.
$\Psi_{0S}$	=	angle de phase nulle du système

### 3.2 Oscillation tournante harmonique

Une oscillation est harmonique lorsque la force de rappel est proportionnelle à la déviation. En présence d'oscillations tournantes harmoniques, le couple de rappel est proportionnel à l'angle de déviation  $\varphi$  :

$$M = D \cdot \varphi$$

Le facteur de proportionnalité D (grandeur directionnelle angulaire) peut être déterminé en mesurant l'angle de déviation et le couple déviant.

D'après la mesure de la durée d'une période T, la fréquence angulaire propre du système  $\omega_0$  résulte de l'équation suivante :

$$\omega_0 = 2 \pi / T$$

et le moment d'inertie de masse de l'équation suivante :

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}$$

### 3.3 Oscillation tournante amortie libre

En présence d'un système oscillant où de l'énergie est perdue suite à des pertes dues aux frottements, sans qu'elle ne soit compensée par de l'énergie apportée de l'extérieur, l'amplitude diminue continuellement, c'est-à-dire que l'oscillation est amortie.

Le couple d'amortissement b est proportionnel à la vitesse angulaire  $\dot{\varphi}$ .

L'équation suivante du mouvement résulte de l'équilibre du couple :

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = 0$$

Si l'oscillation n'est pas amortie, b = 0.

Si l'oscillation commence au moment t = 0 s avec une amplitude maximale  $\widehat{\varphi}_0$ , on obtient l'équation différentielle avec un amortissement pas trop élevé ( $\delta^2 < \omega_0^2$ ) (cas d'oscillation)

$$\varphi = \widehat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

$\delta = b/2J$  représente la constante d'amortissement et

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

la propre fréquence du système amorti.

Si l'amortissement est élevé ( $\delta^2 > \omega_0^2$ ) le système n'oscille plus, mais rampe en position de repos (cas de rampement).

Lorsque l'amortissement n'est pas trop important, la durée T<sub>d</sub> d'une période du système oscillant amorti ne se modifie que légèrement par rapport à T<sub>0</sub> du système oscillant non amorti.

En remplaçant t = n · T<sub>d</sub> dans l'équation

$$\varphi = \widehat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

et pour l'amplitude après n périodes  $\varphi = \widehat{\varphi}_n$ , on obtient avec l'équation  $\omega_d = 2 \pi / T_d$

$$\frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_0} = e^{-n \cdot \delta \cdot T_d}$$

et ainsi le décrément logarithmique  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \delta \cdot T_d = \frac{1}{n} \cdot \ln \left[ \frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_0} \right] = \ln \left[ \frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_{n+1}} \right]$$

En remplaçant  $\delta = \Lambda / T_d$ ,  $\omega_0 = 2\pi / T_0$  et  $\omega_d = 2\pi / T_d$  dans l'équation

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

on obtient :

$$T_d = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}$$

ce qui permet de calculer avec précision la durée d'une période  $T_d$ , dans la mesure où l'on connaît  $T_0$ .

### 3.4 Oscillation tournante forcée

En présence d'oscillations tournantes forcées, un couple modifiable périodiquement par une fonction sinusoïdale agit de l'extérieur sur le système oscillant. Ce couple d'excitation doit être complété dans l'équation de mouvement

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = \widehat{M}_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t)$$

Après une certaine période transitoire, le pendule tournant oscille dans un état stationnaire à la même fréquence angulaire que l'excitateur,  $\omega_E$  pouvant encore être déphasé par rapport à  $\omega_0$ .  $\Psi_{05}$  représente l'angle de phase nulle du système, le déphasage entre le système oscillant et l'excitateur.

$$\varphi = \widehat{\varphi}_S \cdot \sin(\omega_E \cdot t - \Psi_{05})$$

Pour l'amplitude du système  $\widehat{\varphi}_S$ , on a l'équation suivante :

$$\widehat{\varphi} = \frac{\widehat{M}_E}{J \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \cdot \omega_E^2}}$$

Pour le rapport entre l'amplitude du système et celle de l'excitateur, on a l'équation suivante :

$$\frac{\widehat{\varphi}_S}{\widehat{\varphi}_E} = \frac{\widehat{M}_E}{J \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2}}$$

En cas de résonance ( $\omega_E = \omega_0$ ), si les oscillations ne sont pas amorties, l'amplitude augmente théoriquement jusqu'à l'infini et entraîne une « catastrophe de résonance ».

Si les oscillations sont amorties et l'amortissement pas trop important, l'amplitude du système est maximale, la fréquence angulaire de l'excitateur  $\omega_{E \text{ res}}$  étant inférieure à la fréquence angulaire propre du système.

Cette fréquence résulte de

$$\omega_{E \text{ res}} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}}$$

Si l'amortissement est trop important, l'amplitude n'augmente pas.

L'équation suivante s'applique à l'angle de phase nulle du système  $\Psi_{05}$  :

$$\Psi_{05} = \arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Si  $\omega_E = \omega_0$  (résonance), l'angle de phase nulle du système  $\Psi_{05} = 90^\circ$ . Ceci s'applique également pour  $\delta = 0$  avec un passage correspondant à la limite.

Avec des oscillations amorties ( $\delta > 0$ ) et  $\omega_E < \omega_0$ , on obtient  $0^\circ \leq \Psi_{05} \leq 90^\circ$ , avec  $\omega_E > \omega_0$  on obtient  $90^\circ \leq \Psi_{05} \leq 180^\circ$ .

Avec des oscillations amorties ( $\delta = 0$ ),  $\Psi_{05} = 0^\circ$  à  $\omega_E < \omega_0$  et  $\Psi_{05} = 180^\circ$  à  $\omega_E > \omega_0$ .

## 4. Manipulation

### 4.1 Oscillation tournante amortie libre

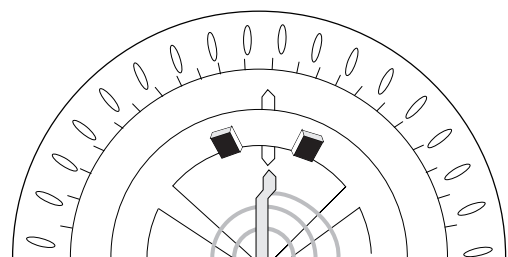
- Relier le frein à courants de Foucault à la sortie de tension réglable de l'alimentation du pendule tournant.
- Connecter l'ampèremètre au circuit électrique.
- Déterminer la constante d'amortissement en fonction du courant.

### 4.2 Oscillation tournante forcée

- Relier les douilles de connexion (16) du moteur excitateur à la sortie de tension fixe de l'alimentation du pendule tournant.
- Relier le voltmètre aux douilles de connexion (15) du moteur excitateur.
- Déterminer l'amplitude de l'oscillation en fonction de la fréquence de l'excitateur et de la tension d'alimentation.
- Au besoin, relier le frein à courants de Foucault à la sortie destinée à la tension réglable de l'alimentation du pendule tournant.

### 4.3 Oscillations chaotiques

- Pour générer des oscillations chaotiques, on peut utiliser les 4 masses supplémentaires qui permettent de modifier le couple de rappel linéaire du pendule tournant.
- Visser pour cela la masse au corps du pendule (5).



## 5. Exemples d'expériences

### 5.1 Oscillation tournante amortie libre

- Pour définir le décrément logarithmique  $\Lambda$ , mesurer et déterminer les amplitudes en plusieurs passages. Pour cela, au cours de deux séries de mesures, lire les déviations du pendule tournant sur la graduation à gauche et à droite.
- Le point de départ du corps du pendule était 15 ou -15 sur la graduation. Cinq déviations ont été lues.
- A partir du rapport des amplitudes, on obtient  $\Lambda$  à l'aide de la formule suivante :

$$\Lambda = \ln \left[ \frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_{n+1}} \right]$$

n	$\widehat{\varphi} -$				$\widehat{\varphi} +$			
0	-15	-15	-15	-15	15	15	15	15
1	-14,8	-14,8	-14,8	-14,8	14,8	14,8	14,8	14,8
2	-14,4	-14,6	-14,4	-14,6	14,4	14,4	14,6	14,4
3	-14,2	-14,4	-14,0	-14,2	14,0	14,2	14,2	14,0
4	-13,8	-14,0	-13,6	-14,0	13,8	13,8	14,0	13,8
5	-13,6	-13,8	-13,4	-13,6	13,4	13,4	13,6	13,6

n	$\emptyset \widehat{\varphi} -$	$\emptyset \widehat{\varphi} +$	$\Lambda -$	$\Lambda +$
0	-15	15		
1	-14,8	14,8	0,013	0,013
2	-14,5	14,5	0,02	0,02
3	-14,2	14,1	0,021	0,028
4	-13,8	13,8	0,028	0,022
5	-13,6	13,5	0,015	0,022

- La valeur déterminée pour  $\Lambda$  est  $\Lambda = 0,0202$ .
- Pour la durée d'oscillation  $T$  du pendule,  $t = n \cdot T$ . Pour cela, mesurer avec un chronomètre la durée de 10 oscillations et calculer  $T$ .

$$T = 1,9 \text{ s}$$

- Ces valeurs permettent de déterminer la constante d'amortissement  $\delta$  avec  $\delta = \Lambda / T$ .

$$\delta = 0,0106 \text{ s}^{-1}$$

- Pour la fréquence propre  $\omega$ , on a l'équation

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \delta^2}$$

$$\omega = 3,307 \text{ Hz}$$

### 5.2 Oscillation tournante amortie libre

- Pour déterminer la constante d'amortissement  $\delta$  en fonction de l'intensité  $I$  par l'électro-aimant, la même expérience a été réalisée avec un frein à courants de Foucault à  $I = 0,2 \text{ A}$ ,  $0,4 \text{ A}$  et  $0,6 \text{ A}$ .

### $I = 0,2 \text{ A}$

n	$\widehat{\varphi} -$				$\emptyset \widehat{\varphi} -$	$\Lambda -$
0	-15	-15	-15	-15	-15	
1	-13,6	-13,8	-13,8	-13,6	-13,7	0,0906
2	-12,6	-12,8	-12,6	-12,4	-12,6	0,13
3	-11,4	-11,8	-11,6	-11,4	-11,5	0,0913
4	-10,4	-10,6	-10,4	-10,4	-10,5	0,0909
5	9,2	-9,6	-9,6	-9,6	-9,5	0,1

- Avec  $T = 1,9 \text{ s}$  et la moyenne  $\Lambda = 0,1006$ , on obtient la constante d'amortissement :  $\delta = 0,053 \text{ s}^{-1}$

### $I = 0,4 \text{ A}$

n	$\widehat{\varphi} -$				$\emptyset \widehat{\varphi} -$	$\Lambda -$
0	-15	-15	-15	-15	-15	
1	-11,8	-11,8	-11,6	-11,6	-11,7	0,248
2	-9,2	-9,0	-9,0	-9,2	-9,1	0,25
3	-7,2	-7,2	-7,0	-7,0	-7,1	0,248
4	-5,8	-5,6	-5,4	-5,2	-5,5	0,25
5	-4,2	-4,2	-4,0	-4,0	-4,1	0,29

- Avec  $T = 1,9 \text{ s}$  et la moyenne  $\Lambda = 0,257$ , on obtient la constante d'amortissement :  $\delta = 0,135 \text{ s}^{-1}$

### $I = 0,6 \text{ A}$

n	$\widehat{\varphi} -$				$\emptyset \widehat{\varphi} -$	$\Lambda -$
0	-15	-15	-15	-15	-15	
1	-9,2	-9,4	-9,2	-9,2	-9,3	0,478
2	-5,4	-5,2	-5,6	-5,8	-5,5	0,525
3	-3,2	-3,2	-3,2	-3,4	-3,3	0,51
4	-1,6	-1,8	-1,8	-1,8	-1,8	0,606
5	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	0,81

- Avec  $T = 1,9 \text{ s}$  et la moyenne  $\Lambda = 0,5858$  on obtient la constante d'amortissement :  $\delta = 0,308 \text{ s}^{-1}$

### 5.3 Oscillation tournante forcée

- Pour déterminer l'amplitude de l'oscillation en fonction de la fréquence de l'excitateur et de la tension d'alimentation, lire la déviation maximale du corps du pendule.

### $T = 1,9 \text{ s}$

Tension moteur V	$\widehat{\varphi}$
3	0,8
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	3,3
7,6	20,0
8	16,8
9	1,6
10	1,1

- D'après la mesure de la durée d'une période T, la fréquence angulaire propre du système  $\omega_0$  résulte de l'équation suivante :

$$\omega_0 = 2 \pi / T = 3,3069 \text{ Hz}$$

- La déviation maximale a lieu avec une tension de moteur de 7,6 V, c'est-à-dire qu'il y a résonance.
- Puis, la même expérience a été réalisée avec un frein à courants de Foucault à I = 0,2 A, 0,4 A et 0,6 A.

**I = 0,2 A**

Tension moteur V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,7
7	2,9
7,6	15,2
8	4,3
9	1,8
10	1,1

**I = 0,4 A**

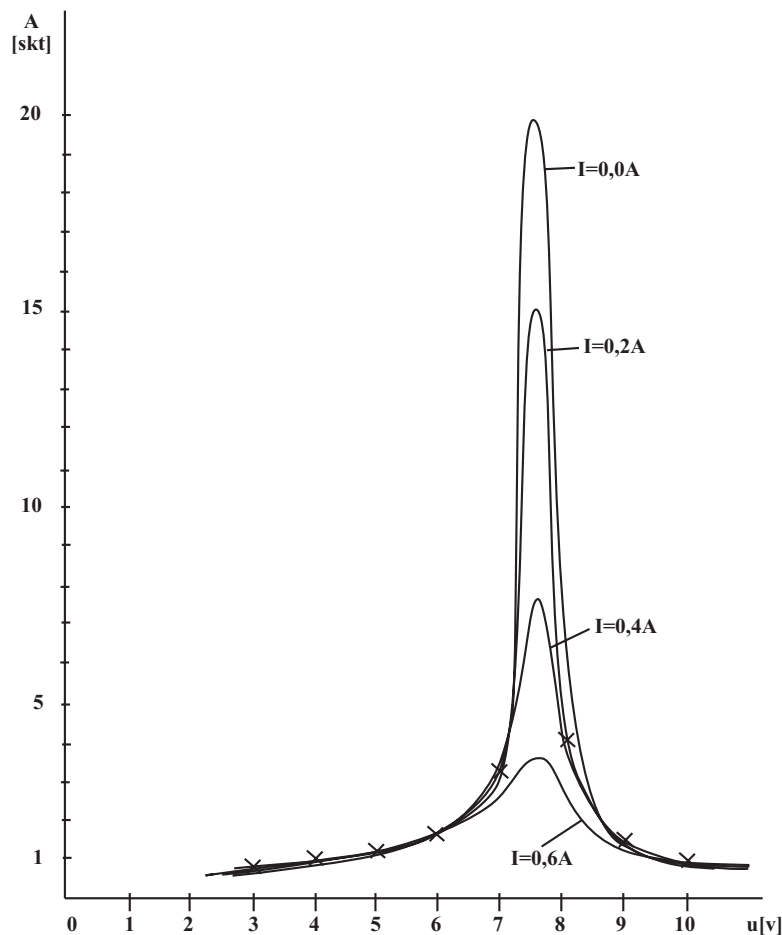
Tension moteur V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1

5	1,3
6	1,8
7	3,6
7,6	7,4
8	3,6
9	1,6
10	1,0

**I = 0,6 A**

Tension moteur V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	2,8
7,6	3,6
8	2,6
9	1,3
10	1,0

- A partir de ces mesures, on peut représenter les courbes de résonance sous forme graphique en reportant les amplitudes en fonction de la tension de moteur.
- La largeur de valeur moyenne du graphe permet de représenter dans un graphique la fréquence de résonance.

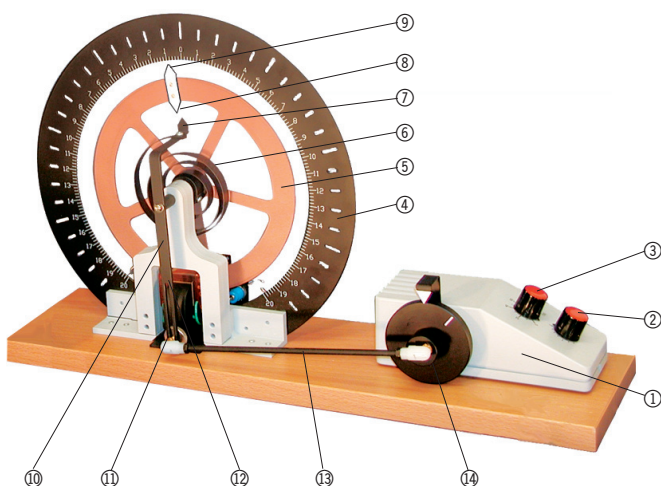


Courbes de résonance

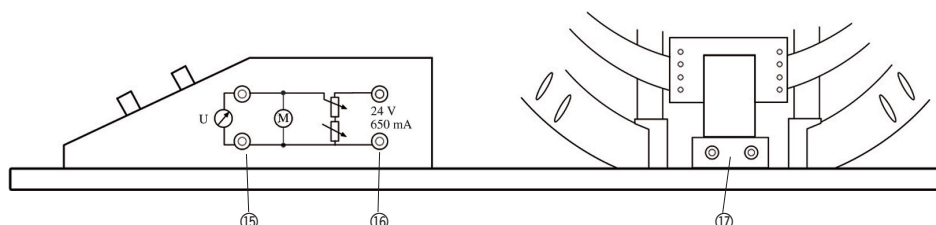
## Pendolo di torsione del Prof. Pohl 1002956

### Istruzioni per l'uso

06/18 ALF



- ① Motore ad eccitazione
- ② Manopola di microregolazione della tensione di eccitazione
- ③ Manopola di macroregolazione della tensione di eccitazione
- ④ Anello graduato:
- ⑤ Corpo del pendolo
- ⑥ Molle a spirale
- ⑦ Indicatore della posizione di fase dell'eccitatore
- ⑧ Indicatore della posizione di fase del corpo del pendolo
- ⑨ Indicatore per la deviazione del corpo del pendolo
- ⑩ Eccitatore
- ⑪ Freno a corrente di Foucault:
- ⑫ Fessura di guida e vite per la regolazione dell'ampiezza dell'eccitatore
- ⑬ Leva di trasmissione
- ⑭ Ruota motrice con eccentrico
- ⑮ Jack di sicurezza da 4 mm per la misurazione della tensione di eccitazione
- ⑯ Jack di sicurezza da 4 mm per l'alimentazione del motore ad eccitazione
- ⑰ Jack di sicurezza da 4 mm per l'alimentazione del freno a corrente di Foucault



Il pendolo di torsione serve per esaminare oscillazioni libere, forzate e caotiche con smorzamenti diversi.

#### Argomenti degli esperimenti:

- oscillazioni di torsione libere con smorzamenti diversi (oscillazione con smorzamento moderato, oscillazione aperiodica e caso limite aperiodico)
- oscillazioni forzate e relative curve di risonanza con smorzamenti diversi
- spostamento di fase tra eccitatore e risonatore in caso di risonanza
- oscillazioni di torsione caotiche
- determinazione statica della costante di collegamento  $D$
- determinazione dinamica del momento d'inerzia  $J$

#### 1. Norme di sicurezza

- Durante l'estrazione dall'imballaggio, non afferrare il pendolo di torsione in corrispondenza dell'anello graduato! Rischio di danneggiamento! Du-

rante l'estrazione utilizzare sempre l'opportuno ausilio (imballaggio interno)!

- Per trasportare il pendolo di torsione, tenere sempre l'apparecchio sulla piastra di base.
- Non superare la tensione di alimentazione max. ammessa del motore ad eccitazione (24 V CC).
- Non sottoporre il pendolo di torsione a sollecitazioni meccaniche non necessarie.

#### 2. Descrizione, caratteristiche tecniche

Il pendolo di torsione del Prof. Pohl è composto da un sistema oscillante montato su una piastra di base in legno e da un motore elettrico. Il sistema oscillante si compone di una ruota di rame con cuscinetti a sfera (5), collegata all'asta di eccitazione tramite una molla a spirale (6), che fornisce il momento di richiamo. Per eccitare il pendolo di torsione è necessario un motore a corrente continua con velocità a regolazione fine e grossolana, che mediante un eccentrico (14) con leva di trasmissione (13) separa e comprime le molle a spi-



rale in sequenza periodica, mettendo in tal modo in moto la ruota di rame. Per lo smorzamento si utilizza un freno elettromagnetico a corrente di Foucault (11). Un anello graduato (4) con fessure e scala con divisioni da 2 mm circonda il sistema oscillante; sull'eccitatore e sul risonatore si trovano indicatori. L'apparecchio può essere utilizzato anche nella dimostrazione della proiezione d'ombra.

Frequenza propria:	ca. 0,5 Hz.
Frequenza di eccitazione:	da 0 a 1,3 Hz (regolabile di continuo)
Conessioni:	
Motore:	max. 24 V CC, 0,7 A, mediante jack di sicurezza da 4 mm
Freno a corrente di Foucault:	da 0 a 20 V CC, max. 2 A, mediante jack di sicurezza da 4 mm
Anello graduato:	300 mm Ø
Dimensioni:	400 mm x 140 mm x 270 mm
Peso:	4 kg

## 2.1 Fornitura

- 1 pendolo di torsione
- 2 masse supplementari da 10 g
- 2 masse supplementari da 20 g

## 3. Principi teorici

### 3.1 Simboli delle formule utilizzati

D	=	costante di collegamento angolare
J	=	momento di inerzia delle masse
M	=	momento torcente di richiamo
T	=	periodo
$T_0$	=	periodo del sistema non smorzato
$T_d$	=	periodo del sistema smorzato
$\widehat{M}_E$	=	ampiezza del momento torcente dell'eccitatore
b	=	momento di smorzamento
n	=	frequenza
t	=	tempo
$\Lambda$	=	decremento logaritmico
$\delta$	=	costante di smorzamento
$\varphi$	=	angolo di deviazione
$\widehat{\varphi}_0$	=	ampiezza relativa al tempo $t = 0$ s
$\widehat{\varphi}_n$	=	ampiezza dopo n periodi
$\widehat{\varphi}_E$	=	ampiezza di eccitazione
$\widehat{\varphi}_S$	=	ampiezza del sistema
$\omega_0$	=	frequenza propria del sistema oscillante
$\omega_d$	=	frequenza propria del sistema smorzato
$\omega_E$	=	frequenza del circuito di eccitazione
$\omega_{E\ res}$	=	frequenza del circuito di eccitazione per ampiezza max.
$\Psi_{0S}$	=	angolo di fase zero del sistema

### 3.2 Oscillazione di torsione armonica

Un'oscillazione armonica è presente se la forza di ri-

chiamo è proporzionale alla deviazione. In caso di oscillazioni di torsione armoniche il momento torcente di richiamo è proporzionale all'angolo di deviazione  $\varphi$ :

$$M = D \cdot \varphi$$

Il fattore di proporzionalità D (costante di collegamento angolare) può essere calcolato mediante misurazione dell'angolo di deviazione e del momento deviante.

La frequenza del circuito proprio del sistema  $\omega_0$  si ottiene dalla misurazione del periodo T

$$\omega_0 = 2 \pi / T$$

e il momento di inerzia delle masse J da

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}$$

### 3.3 Oscillazione di torsione smorzata libera

In un sistema oscillante, nel quale si verificano perdite di energia a causa di perdite per attriti, senza che l'energia venga compensata da energia apportata dall'esterno, l'ampiezza si riduce costantemente, ossia l'oscillazione è smorzata.

In ciò il momento di smorzamento b è proporzionale alla velocità angolare  $\dot{\varphi}$ .

Dall'equilibrio del momento torcente si ottiene l'equazione del moto

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = 0$$

Per l'oscillazione non smorzata,  $b = 0$

Se inizia l'oscillazione relativa al tempo  $t = 0$  s con l'ampiezza massima  $\widehat{\varphi}_0$  si ottiene la soluzione dell'equazione differenziale con uno smorzamento non troppo potente ( $\delta^2 < \omega_0^2$ ) (oscillazione)

$$\varphi = \widehat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

$\delta = b/2J$  è la costante di smorzamento e

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$\omega_d$  = frequenza propria del sistema smorzato.

In caso di smorzamento potente ( $\delta^2 > \omega_0^2$ ) il sistema non oscilla ma scorre in posizione di riposo (scorrimento).

In caso di smorzamento non troppo potente, il periodo  $T_d$  del sistema oscillante smorzato cambia solo leggermente rispetto a  $T_0$  del sistema oscillante non smorzato.

Inserendo  $t = n \cdot T_d$  nell'equazione

$$\varphi = \widehat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

e per l'ampiezza in base a n periodi  $\varphi = \widehat{\varphi}_n$  si ottiene con la definizione  $\omega_d = 2 \pi / T_d$

$$\frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_0} = e^{-n \cdot \delta \cdot T_d}$$

e da ciò il decremento logaritmico  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \delta \cdot T_d = \frac{1}{n} \cdot \ln \left[ \frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_0} \right] = \ln \left[ \frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_{n+1}} \right]$$

Inserendo  $\delta = \Lambda / T_d$ ,  $\omega_0 = 2\pi / T_0$  e  $\omega_d = 2\pi / T_d$  nell'equazione

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

si ottiene:

$$T_d = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}$$

dove il periodo  $T_d$  può essere calcolato con precisione, se è noto  $T_0$ .

### 3.4 Oscillazione di torsione forzata

In caso di oscillazioni di torsione forzate agisce dall'esterno un momento torcente variabile periodicamente con una funzione sinusoidale sul sistema oscillante. Questo momento di eccitazione deve essere integrato nell'equazione del moto.

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = \widehat{M}_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t)$$

Dopo un tempo di assestamento il pendolo di torsione oscilla in uno stato stazionario con la stessa frequenza del circuito dell'eccitatore, dove  $\omega_E$  può essere ulteriormente spostato di fase verso  $\omega_0$ .  $\Psi_{05}$  è l'angolo di fase zero del sistema, lo spostamento di fase tra il sistema oscillante e l'eccitatore.

$$\varphi = \widehat{\varphi}_S \cdot \sin(\omega_E \cdot t - \Psi_{05})$$

Per l'ampiezza del sistema  $\widehat{\varphi}_S$  vale

$$\widehat{\varphi}_S = \frac{\widehat{M}_E}{J \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \cdot \omega_E^2}}$$

Per il rapporto tra l'ampiezza del sistema e l'ampiezza dell'eccitatore vale

$$\frac{\widehat{\varphi}_S}{\widehat{\varphi}_E} = \frac{\widehat{M}_E}{J \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2}}$$

Con oscillazioni non smorzate aumenta l'ampiezza in caso di risonanza ( $\omega_E$  uguale a  $\omega_0$ ) teoricamente all'infinito e viene determinata una "catastrofe di risonanza".

Con oscillazioni smorzate e uno smorzamento non troppo potente, l'ampiezza del sistema diventa massima, dove la frequenza del circuito dell'eccitatore  $\omega_{E\text{res}}$  è inferiore rispetto alla frequenza del circuito proprio del sistema. Questa frequenza si ottiene da

$$\omega_{E\text{res}} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}}$$

In caso di smorzamento potente non si verifica alcun incremento di ampiezza.

Per l'angolo di fase zero del sistema  $\Psi_{05}$  vale

$$\Psi_{05} = \arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Per  $\omega_E = \omega_0$  (risonanza) l'angolo di fase zero del sistema  $\Psi_{05} = 90^\circ$ . Ciò vale anche per  $\delta = 0$  con relativa transizione.

Con oscillazioni smorzate ( $\delta > 0$ ) e  $\omega_E < \omega_0$  si ottiene  $0^\circ \leq \Psi_{05} \leq 90^\circ$ , per  $\omega_E > \omega_0$  vale  $90^\circ \leq \Psi_{05} \leq 180^\circ$ .

Con oscillazioni non smorzate ( $\delta = 0$ ) vale  $\Psi_{05} = 0^\circ$  con  $\omega_E < \omega_0$  e  $\Psi_{05} = 180^\circ$  per  $\omega_E > \omega_0$ .

## 4. Comandi

### 4.1 Oscillazione di torsione smorzata libera

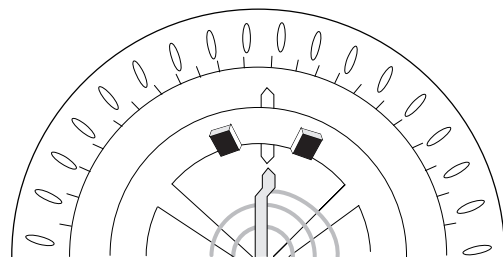
- Collegare il freno a corrente di Foucault con l'uscita per la tensione regolabile dell'alimentatore del pendolo di torsione.
- Attivare l'amperometro nel circuito elettrico.
- Determinare la costante di smorzamento in funzione della corrente.

### 4.2 Oscillazione di torsione forzata

- Collegare i jack di raccordo (16) del motore ad eccitazione con l'uscita di tensione fissa dell'alimentatore del pendolo di torsione.
- Collegare il voltmetro con i jack di raccordo (15) del motore ad eccitazione.
- Determinazione dell'ampiezza di oscillazione in funzione della frequenza dell'eccitatore o della tensione di alimentazione.
- Se necessario, collegare il freno a corrente di Foucault con l'uscita per la tensione regolabile dell'alimentatore del pendolo di torsione.

### 4.3 Oscillazioni caotiche

- Per la produzione di oscillazioni caotiche sono disponibili 4 masse supplementari, che modificano il momento di rovesciamento lineare del pendolo di torsione.
- A tale scopo avvitare la massa supplementare sul corpo del pendolo (5).



## 5. Esempi di esperimenti

### 5.1 Oscillazione di torsione smorzata libera

- Per la determinazione del decremento logaritmico  $\Lambda$  le ampiezze vengono misurate in più flussi e vengono determinati i valori medi. A tale scopo le deviazioni del pendolo di torsione sulla scala di volta in volta a sinistra e a destra vengono lette in due serie di misure.
- Il punto di partenza del corpo del pendolo era compreso tra 15 e -15 sulla scala. Sono state lette cinque deviazioni.
- Dal rapporto delle ampiezze si ricava  $\Lambda$  in base alla formula

$$\Lambda = \ln \left[ \frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_{n+1}} \right]$$

n	$\widehat{\varphi} -$				$\widehat{\varphi} +$			
0	-15	-15	-15	-15	15	15	15	15
1	-14,8	-14,8	-14,8	-14,8	14,8	14,8	14,8	14,8
2	-14,4	-14,6	-14,4	-14,6	14,4	14,4	14,6	14,4
3	-14,2	-14,4	-14,0	-14,2	14,0	14,2	14,2	14,0
4	-13,8	-14,0	-13,6	-14,0	13,8	13,8	14,0	13,8
5	-13,6	-13,8	-13,4	-13,6	13,4	13,4	13,6	13,6

n	$\emptyset \widehat{\varphi} -$	$\emptyset \widehat{\varphi} +$	$\Lambda -$	$\Lambda +$
0	-15	15		
1	-14,8	14,8	0,013	0,013
2	-14,5	14,5	0,02	0,02
3	-14,2	14,1	0,021	0,028
4	-13,8	13,8	0,028	0,022
5	-13,6	13,5	0,015	0,022

- Il valore medio per  $\Lambda$  ammonta a  $\Lambda = 0,0202$ .
- Per la durata dell'oscillazione  $T$  del pendolo vale  $t = n \cdot T$ . A tale scopo misurare il tempo per 10 oscillazioni con un cronometro e calcolare  $T$ .

$$T = 1,9 \text{ s}$$

- Da questi valori è possibile determinare la costante di smorzamento  $\delta$  con  $\delta = \Lambda / T$ .

$$\delta = 0,0106 \text{ s}^{-1}$$

- Per la frequenza propria  $\omega$  vale

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \delta^2}$$

$$\omega = 3,307 \text{ Hz}$$

### 5.2 Oscillazione di torsione smorzata libera

- Per la determinazione della costante di smorzamento  $\delta$  in funzione della corrente  $I$  mediante l'elettromagnete è stato eseguito lo stesso tentativo con il freno a corrente di Foucault inserito con  $I = 0,2 \text{ A}$ ,  $0,4 \text{ A}$  e  $0,6 \text{ A}$ .

### I = 0,2 A

n	$\widehat{\varphi} -$				$\emptyset \widehat{\varphi} -$	$\Lambda -$
0	-15	-15	-15	-15	-15	
1	-13,6	-13,8	-13,8	-13,6	-13,7	0,0906
2	-12,6	-12,8	-12,6	-12,4	-12,6	0,13
3	-11,4	-11,8	-11,6	-11,4	-11,5	0,0913
4	-10,4	-10,6	-10,4	-10,4	-10,5	0,0909
5	9,2	-9,6	-9,6	-9,6	-9,5	0,1

- Con  $T = 1,9 \text{ s}$  e  $\Lambda = 0,1006$  medio si ottiene la costante di smorzamento:  $\delta = 0,053 \text{ s}^{-1}$

### I = 0,4 A

n	$\widehat{\varphi} -$				$\emptyset \widehat{\varphi} -$	$\Lambda -$
0	-15	-15	-15	-15	-15	
1	-11,8	-11,8	-11,6	-11,6	-11,7	0,248
2	-9,2	-9,0	-9,0	-9,2	-9,1	0,25
3	-7,2	-7,2	-7,0	-7,0	-7,1	0,248
4	-5,8	-5,6	-5,4	-5,2	-5,5	0,25
5	-4,2	-4,2	-4,0	-4,0	-4,1	0,29

- Con  $T = 1,9 \text{ s}$  e  $\Lambda = 0,257$  medio si ottiene la costante di smorzamento:  $\delta = 0,135 \text{ s}^{-1}$

### I = 0,6 A

n	$\widehat{\varphi} -$				$\emptyset \widehat{\varphi} -$	$\Lambda -$
0	-15	-15	-15	-15	-15	
1	-9,2	-9,4	-9,2	-9,2	-9,3	0,478
2	-5,4	-5,2	-5,6	-5,8	-5,5	0,525
3	-3,2	-3,2	-3,2	-3,4	-3,3	0,51
4	-1,6	-1,8	-1,8	-1,8	-1,8	0,606
5	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	0,81

- Con  $T = 1,9 \text{ s}$  e  $\Lambda = 0,5858$  medio si ottiene la costante di smorzamento:  $\delta = 0,308 \text{ s}^{-1}$

### 5.3 Oscillazione di torsione forzata

- Per la determinazione dell'ampiezza di oscillazione in funzione della frequenza di eccitazione o della tensione di alimentazione viene letta la deviazione massima del corpo del pendolo.

### T = 1,9 s

Tensione motore V	$\widehat{\varphi}$
3	0,8
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	3,3
7,6	20,0
8	16,8
9	1,6
10	1,1

- La frequenza del circuito proprio del sistema  $\omega_0$  si ottiene dalla misurazione del periodo T  

$$\omega_0 = 2 \pi/T = 3,3069 \text{ Hz}$$
- In caso di tensione del motore pari a 7,6 V ha luogo la deviazione massima, ossia si verifica la risonanza.
- Quindi è stato eseguito lo stesso tentativo con freno a corrente di Foucault inserito con  $I = 0,2 \text{ A}$ ,  $0,4 \text{ A}$  e  $0,6 \text{ A}$ .

**I = 0,2 A**

Tensione motore V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,7
7	2,9
7,6	15,2
8	4,3
9	1,8
10	1,1

**I = 0,4 A**

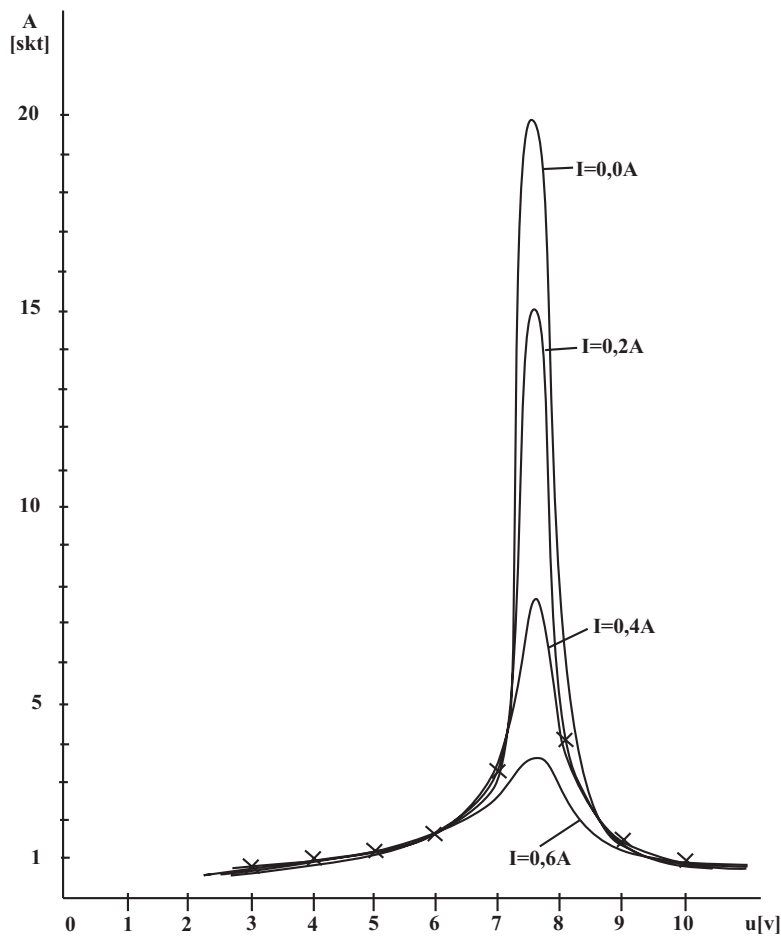
Tensione motore V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1

5	1,3
6	1,8
7	3,6
7,6	7,4
8	3,6
9	1,6
10	1,0

**I = 0,6 A**

Tensione motore V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	2,8
7,6	3,6
8	2,6
9	1,3
10	1,0

- Da queste misurazioni è possibile rappresentare graficamente le curve di risonanza, tracciando le ampiezze in funzione della tensione del motore.
- Dalla semilarghezza del grafo può essere determinata graficamente la frequenza della risonanza.

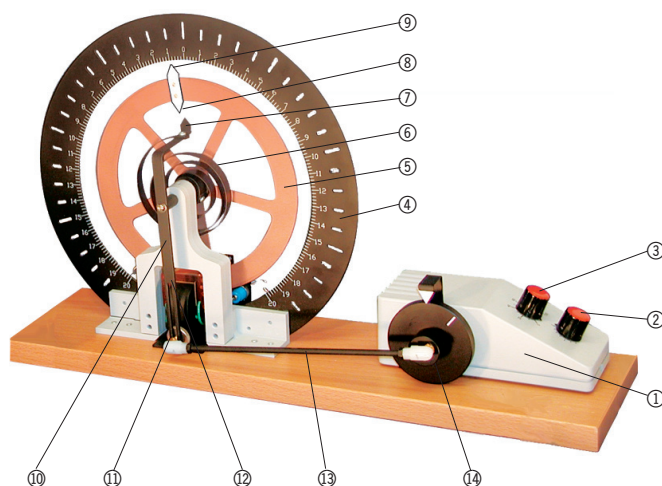


Curve di risonanza

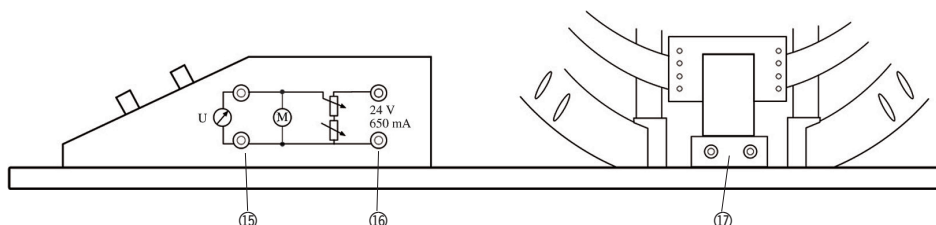
## Péndulo oscilatorio según Pohl 1002956

### Instrucciones de uso

06/18 ALF



- ① Motor de excitación
- ② Botón para ajuste fino de la tensión de excitación
- ③ Botón para ajuste grueso de la tensión de excitación
- ④ Anillo graduado
- ⑤ Cuerpo pendular
- ⑥ Muelle espiral
- ⑦ Indicador de la posición de fase del excitador
- ⑧ Indicador de la posición de fase del péndulo
- ⑨ Indicador de desviación del péndulo
- ⑩ Excitador
- ⑪ Freno de corrientes parásitas
- ⑫ Ranura guía y tornillo para el ajuste de la amplitud de excitación
- ⑬ Biela
- ⑭ Rueda con palanca excéntrica
- ⑮ Clavijeros de seguridad de 4 mm para medición de la tensión de excitación
- ⑯ Clavijeros de seguridad de 4 mm para alimentación del motor de excitación
- ⑰ Clavijeros de seguridad de 4 mm para alimentación del freno de corrientes parásitas



El péndulo oscilatorio sirve para el estudio de oscilaciones libres, forzadas y caóticas frente a diferentes atenuaciones.

#### Temas experimentales:

- Oscilaciones torsionales libres con distintas atenuaciones (caso oscilante con atenuación media, oscilación no periódica y caso límite no periódico)
- Oscilaciones forzadas y sus características de resonancia frente a diferentes atenuaciones
- Desfase entre excitador y resonador en caso de resonancia
- Oscilaciones torsionales caóticas
- Determinación estática de la magnitud de referencia  $D$
- Determinación dinámica del momento de inercia  $J$

#### 1. Aviso de seguridad

- ¡Al retirar el péndulo oscilatorio de su embalaje no se lo debe tomar por el anillo graduado! ¡Peligro

de daño! ¡El equipo siempre se debe retirar con ayuda de material auxiliar (envoltura interna)!

- Para transportar el péndulo oscilatorio se lo debe sujetar siempre de la placa base.
- No se debe sobrepasar la máxima tensión de alimentación permitida del motor de excitación (24 V c.c.).
- El péndulo oscilatorio no se debe someter a esfuerzos mecánicos innecesarios.

#### 2. Descripción, datos técnicos

El péndulo según Pohl se compone de un sistema oscilatorio, montado sobre una placa base de madera, y de un motor eléctrico. El sistema oscilatorio consta de un rueda de cobre (5) asentada sobre un rodamiento de bolas y conectada a la varilla de excitación por medio de un muelle espiral (6), que suministra el momento de retroceso. Para la excitación del péndulo oscilatorio se utiliza un motor de corriente continua, con velocidad de giro de ajuste grueso y fino, el cual

presiona y estira el muelle espiral, en secuencias periódicas, por medio de una palanca excéntrica (14), dotada de una biela (13), provocando de esta manera la oscilación de la rueda de cobre. Para la atenuación se emplea un freno electromagnético de corrientes parásitas (11). Un anillo graduado (4), con ranuras y escala con división de 2 mm, rodea el sistema oscilatorio; los indicadores se encuentran en el excitador y el resonador.

El equipo también se puede utilizar para experimentos de demostración con proyección de sombras.

Frecuencia propia: aprox. 0,5 Hz.

Frecuencia de excitación: 0 a 1,3 Hz

(ajuste continuo)

Conexiones:

Motor: máx. 24 V c.c., 0,7 A, a través de clavijeros de seguridad de 4 mm

Freno de corrientes parásitas: 0 a 20 V c.c., máx. 2 A, a través de clavijeros de seguridad de 4 mm

Anillo graduado: 300 mm Ø

Dimensiones: 400 mm x 140 mm x 270 mm

Peso: 4 kg

## 2.1 Volumen de suministro

1 péndulo oscilatorio

2 pesas adicionales de 10 g

2 pesas adicionales de 20 g

## 3. Fundamentos teóricos

### 3.1 Símbolos empleados

D	=	magnitud de referencia angular
J	=	momento de inercia de masa
M	=	momento de giro de retroceso
T	=	duración de periodo
$T_0$	=	duración de periodo del sistema sin atenuación
$T_d$	=	duración de periodo del sistema con atenuación
$\widehat{M}_E$	=	amplitud del momento de giro del excitador
b	=	momento de atenuación
n	=	cantidad de periodos
t	=	tiempo
$\Lambda$	=	decremento logarítmico
$\delta$	=	constante de atenuación
$\varphi$	=	ángulo de desviación
$\widehat{\varphi}_0$	=	amplitud para tiempo $t = 0$ s
$\widehat{\varphi}_n$	=	amplitud tras n periodos
$\widehat{\varphi}_E$	=	amplitud del excitador
$\widehat{\varphi}_S$	=	amplitud del sistema
$\omega_0$	=	frecuencia propia del sistema oscilatorio
$\omega_d$	=	frecuencia propia del sistema amortiguado
$\omega_E$	=	frecuencia angular del excitador

$\omega_{E \text{ res}}$  = frecuencia angular del excitador para la máx. amplitud

$\Psi_{0s}$  = ángulo de fase cero del sistema

### 3.2 Oscilación torsional armónica

Una oscilación armónica se presenta cuando la fuerza de reacción es proporcional a la desviación. En el caso de las oscilaciones torsionales armónicas, el par de giro de retroceso es proporcional al ángulo de desviación  $\varphi$ :

$$M = D \cdot \varphi$$

El factor de proporcionalidad D (magnitud de referencia angular) se puede calcular a partir de la medición del ángulo de desviación y del momento de desviación.

La frecuencia angular propia del sistema  $\omega_0$  se obtiene de la medición de la duración de periodo T a partir de:

$$\omega_0 = 2 \pi / T,$$

mientras que el momento de inercia de masa J se obtiene de:

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}$$

### 3.3 Oscilación torsional sin amortiguación

En un sistema oscilatorio cuya energía decrece debido a las pérdidas por fricción, sin que dicha energía se vea compensada por una alimentación externa, la amplitud disminuye constantemente, esto es, la oscilación sufre una amortiguación.

En este caso, el momento de amortiguación b es proporcional a la velocidad angular  $\dot{\varphi}$ .

Partiendo del equilibrio del momento se obtiene la ecuación de movimiento:

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = 0$$

En el caso de la oscilación sin amortiguación, b es igual a 0.

Si con el tiempo  $t = 0$  s, la oscilación se inicia con la amplitud máxima  $\widehat{\varphi}_0$ , se obtiene la solución de la ecuación diferencial con una amortiguación no muy elevada ( $\delta^2 < \omega_0^2$ ) (caso oscilante)

$$\varphi = \widehat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

$\delta = b/2J$  es la constante de amortiguación y

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

la frecuencia propia del sistema amortiguado.

Frente a una amortiguación fuerte ( $\delta^2 > \omega_0^2$ ) el sistema no oscila, sino que se arrastra hacia el estado de reposo.

Frente a una amortiguación no muy fuerte, la duración de periodo  $T_d$  del sistema oscilante varía de manera mínima en relación al periodo  $T_0$  del sistema oscilante no amortiguado.

Si se sustituye  $t = n \cdot T_d$  en la ecuación

$$\varphi = \widehat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

y para la amplitud tras  $n$  periodos  $\varphi = \widehat{\varphi}_n$ , se obtiene lo siguiente, con la relación  $\omega_d = 2\pi/T_d$

$$\frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_0} = e^{-n \cdot \delta \cdot T_d}$$

y, a partir de ello, el decremento logarítmico  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \delta \cdot T_d = \frac{1}{n} \cdot \ln \left[ \frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_0} \right] = \ln \left[ \frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_{n+1}} \right]$$

Si se reemplaza  $\delta = \Lambda / T_d$ ,  $\omega_0 = 2\pi / T_0$  y  $\omega_d = 2\pi / T_d$  en la ecuación

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

se obtiene:

$$T_d = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}$$

con lo que se puede calcular exactamente la duración del periodo  $T_d$ , si se conoce el valor de  $T_0$ .

### 3.4 Oscilación torsional forzada

Las oscilaciones torsionales forzadas se generan cuando, sobre el sistema oscilante, actúa externamente un par de giro de variación periódica con una función sinusoidal. Se debe sustituir este momento de excitación en la ecuación de movimiento

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = \widehat{M}_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t)$$

Una vez transcurrido el tiempo de establecimiento de la oscilación, el péndulo oscilatorio alcanza un estado estacionario con la misma frecuencia angular que la del excitador, siendo incluso factible que  $\omega_E$  se encuentre desfasada en relación a  $\omega_0$ .  $\Psi_{0S}$  es el ángulo de fase cero del sistema, el desfase entre el sistema oscilante y el excitador.

$$\varphi = \widehat{\varphi}_S \cdot \sin(\omega_E \cdot t - \Psi_{0S})$$

Para la amplitud  $\widehat{\varphi}_S$  es válido lo siguiente:

$$\widehat{\varphi}_S = \frac{\widehat{M}_E}{J \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \cdot \omega_E^2}}$$

Para la relación entre la amplitud del sistema y la del excitador se aplica:

$$\frac{\widehat{\varphi}_S}{\widehat{\varphi}_E} = \frac{\widehat{M}_E}{J \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2}}$$

En el caso de las oscilaciones no amortiguadas, si se presenta el caso de resonancia ( $\omega_E$  es igual a  $\omega_0$ ), teóricamente, la amplitud aumenta hasta el infinito, lo cual produciría la destrucción del sistema.

Con oscilaciones atenuadas por una amortiguación no demasiado fuerte, se alcanza la máxima amplitud del sistema, siendo la frecuencia angular del excitador  $\omega_{E\text{res}}$  menor que la frecuencia angular propia del sistema. Esta frecuencia se obtiene a partir de:

$$\omega_{E\text{res}} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}}$$

Si se tiene una amortiguación fuerte, no se producen excesos de amplitud.

Para el ángulo de fase cero  $\Psi_{0S}$  del sistema es válido:

$$\Psi_{0S} = \arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega_E^2}\right)$$

Para  $\omega_E = \omega_0$  (resonancia), el ángulo de fase cero  $\Psi_{0S}$  del sistema es igual a  $90^\circ$ . Esto también es válido para  $\delta = 0$ , en donde la oscilación sobrepasa su valor límite.

Con oscilaciones amortiguadas ( $\delta > 0$ ) y  $\omega_E < \omega_0$  se obtiene  $0^\circ \leq \Psi_{0S} \leq 90^\circ$ , para  $\omega_E > \omega_0$  es válido  $90^\circ \leq \Psi_{0S} \leq 180^\circ$ .

Con oscilaciones no amortiguadas ( $\delta = 0$ ) es válido  $\Psi_{0S} = 0^\circ$  con  $\omega_E < \omega_0$  y  $\Psi_{0S} = 180^\circ$  para  $\omega_E > \omega_0$ .

## 4. Servicio

### 4.1 Oscilación torsional de amortiguación libre

- Conectar el freno de corrientes parásitas a la salida de tensión regulable de la fuente de alimentación del péndulo oscilatorio.
- Conectar el amperímetro al circuito de corriente.
- Determinar la constante de amortiguación en función de la corriente.

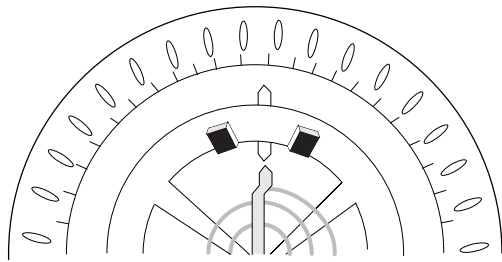
### 4.2 Oscilación torsional forzada

- Conectar el clavijero (16) del motor de excitación a la salida de tensión fija de la fuente de alimentación del péndulo oscilatorio.
- Conectar el voltímetro a los clavijeros de conexión (15) del motor de excitación.
- Determinar la amplitud de oscilación en función de la frecuencia del excitador o de la tensión de alimentación.
- En caso de ser necesario, conectar el freno de corrientes parásitas a la salida de tensión ajustable de la fuente de alimentación del péndulo oscilatorio.

### 4.3 Oscilaciones caóticas

- Para generar oscilaciones caóticas se dispone de 4 pesas adicionales que varían el momento lineal de retroceso del péndulo oscilatorio.

- Lo anterior se realiza atornillando las pesas al cuerpo del péndulo (5).



## 5. Ejemplos de experimentos

### 5.1 Oscilación torsional de amortiguación libre

- Para determinar el decremento logarítmico  $\Lambda$  se miden y se promedian las amplitudes de varios ciclos, para lo cual se leen las oscilaciones del péndulo tanto a la derecha como a la izquierda de la escala.
- El punto de partida del cuerpo pendular se encontraba en 15, ó bien en  $-15$ , de la escala. Se leyeron cinco oscilaciones.
- A partir de la relación de amplitud se obtiene  $\Lambda$  de acuerdo con la fórmula:

$$\Lambda = \ln \left[ \frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_{n+1}} \right]$$

n	$\widehat{\varphi} -$				$\widehat{\varphi} +$			
	0	-15	-15	-15	-15	15	15	15
1	-14,8	-14,8	-14,8	-14,8	14,8	14,8	14,8	14,8
2	-14,4	-14,6	-14,4	-14,6	14,4	14,4	14,6	14,4
3	-14,2	-14,4	-14,0	-14,2	14,0	14,2	14,2	14,0
4	-13,8	-14,0	-13,6	-14,0	13,8	13,8	14,0	13,8
5	-13,6	-13,8	-13,4	-13,6	13,4	13,4	13,6	13,6

n	$\emptyset \widehat{\varphi} -$	$\emptyset \widehat{\varphi} +$	$\Lambda -$	$\Lambda +$
0	-15	15		
1	-14,8	14,8	0,013	0,013
2	-14,5	14,5	0,02	0,02
3	-14,2	14,1	0,021	0,028
4	-13,8	13,8	0,028	0,022
5	-13,6	13,5	0,015	0,022

- El valor promedio de  $\Lambda$  es igual a 0,0202.
- Para la duración de oscilación  $T$  del péndulo es válido  $t = n \cdot T$ . Medir para ello, con un cronómetro, el tiempo necesario para 10 oscilaciones y calcular el valor de  $T$ .

$$T = 1,9 \text{ s}$$

- A partir de estos valores se puede determinar la constante de amortiguación  $\delta$  por medio de  $\delta = \Lambda / T$ .

$$\delta = 0,0106 \text{ s}^{-1}$$

- Para la frecuencia propia  $\omega$  es válido

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \delta^2}$$

$$\omega = 3,307 \text{ Hz}$$

### 5.2 Oscilación torsional de amortiguación libre

- Para determinar la constante de amortiguación  $\delta$  en función de la corriente  $I$  que fluye por los electroimanes, se realizó el mismo experimento conectándose adicionalmente el freno de corrientes parásitas con  $I = 0,2 \text{ A}$ ,  $0,4 \text{ A}$  y  $0,6 \text{ A}$ .

#### $I = 0,2 \text{ A}$

n	$\widehat{\varphi} -$				$\emptyset \widehat{\varphi} -$	$\Lambda -$
	0	-15	-15	-15	-15	-15
1	-13,6	-13,8	-13,8	-13,6	-13,7	0,0906
2	-12,6	-12,8	-12,6	-12,4	-12,6	0,13
3	-11,4	-11,8	-11,6	-11,4	-11,5	0,0913
4	-10,4	-10,6	-10,4	-10,4	-10,5	0,0909
5	9,2	-9,6	-9,6	-9,6	-9,5	0,1

- Con  $T = 1,9 \text{ s}$  y el valor promedio  $\Lambda = 0,1006$  se obtiene la constante de amortiguación:  $\delta = 0,053 \text{ s}^{-1}$

#### $I = 0,4 \text{ A}$

n	$\widehat{\varphi} -$				$\emptyset \widehat{\varphi} -$	$\Lambda -$
	0	-15	-15	-15	-15	-15
1	-11,8	-11,8	-11,6	-11,6	-11,7	0,248
2	-9,2	-9,0	-9,0	-9,2	-9,1	0,25
3	-7,2	-7,2	-7,0	-7,0	-7,1	0,248
4	-5,8	-5,6	-5,4	-5,2	-5,5	0,25
5	-4,2	-4,2	-4,0	-4,0	-4,1	0,29

- Con  $T = 1,9 \text{ s}$  y el valor promedio  $\Lambda = 0,257$  se obtiene la constante de amortiguación:  $\delta = 0,135 \text{ s}^{-1}$

#### $I = 0,6 \text{ A}$

n	$\widehat{\varphi} -$				$\emptyset \widehat{\varphi} -$	$\Lambda -$
	0	-15	-15	-15	-15	-15
1	-9,2	-9,4	-9,2	-9,2	-9,3	0,478
2	-5,4	-5,2	-5,6	-5,8	-5,5	0,525
3	-3,2	-3,2	-3,2	-3,4	-3,3	0,51
4	-1,6	-1,8	-1,8	-1,8	-1,8	0,606
5	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	0,81

- Con  $T = 1,9 \text{ s}$  y el valor promedio  $\Lambda = 0,5858$  se obtiene la constante de amortiguación:  $\delta = 0,308 \text{ s}^{-1}$

### 5.3 Oscilación torsional forzada

- Para determinar la amplitud de oscilación en función de la frecuencia del excitador, o bien de la tensión de alimentación, se lee la máxima oscilación del cuerpo pendular.



**T = 1,9 s**

Tensión del motor V	$\hat{\varphi}$
3	0,8
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	3,3
7,6	20,0
8	16,8
9	1,6
10	1,1

- La frecuencia circular propia del sistema  $\omega_0$  se obtiene de la medición de la duración de periodo T a partir de:

$$\omega_0 = 2 \pi / T = 3,3069 \text{ Hz}$$

- Con una tensión del motor de 7,6 V se presenta la mayor desviación, esto es, se presenta el caso de resonancia.
- A continuación se llevó a cabo el mismo experimento con la presencia adicional del freno de corrientes parásitas con  $I = 0,2 \text{ A}$ ,  $0,4 \text{ A}$  y  $0,6 \text{ A}$ .

**I = 0,2 A**

Tensión del motor V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1

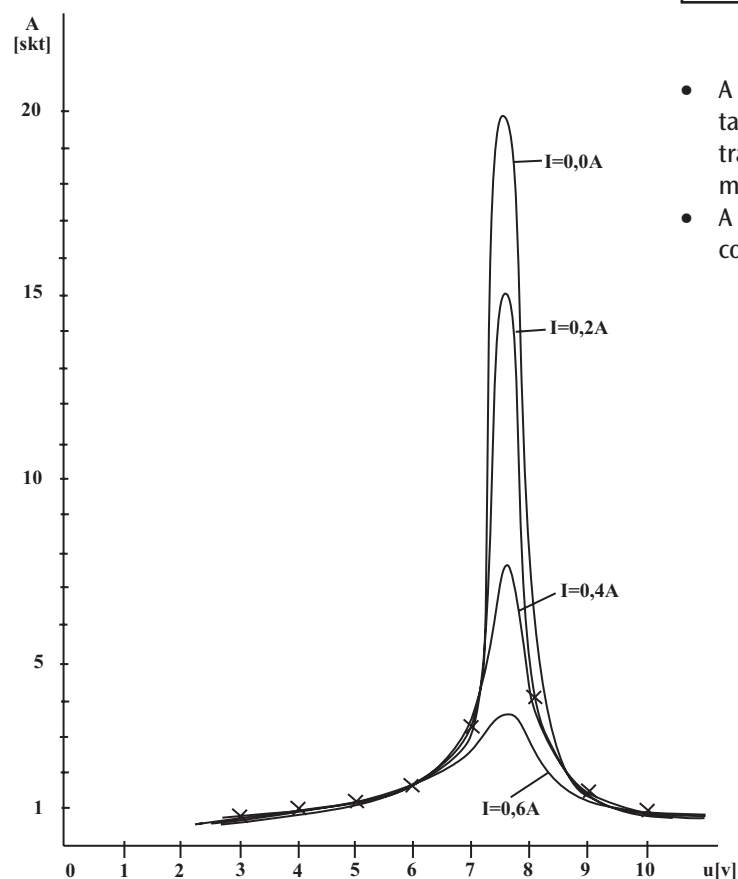
5	1,2
6	1,7
7	2,9
7,6	15,2
8	4,3
9	1,8
10	1,1

**I = 0,4 A**

Tensión del motor V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,3
6	1,8
7	3,6
7,6	7,4
8	3,6
9	1,6
10	1,0

**I = 0,6 A**

Tensión del motor V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	2,8
7,6	3,6
8	2,6
9	1,3
10	1,0



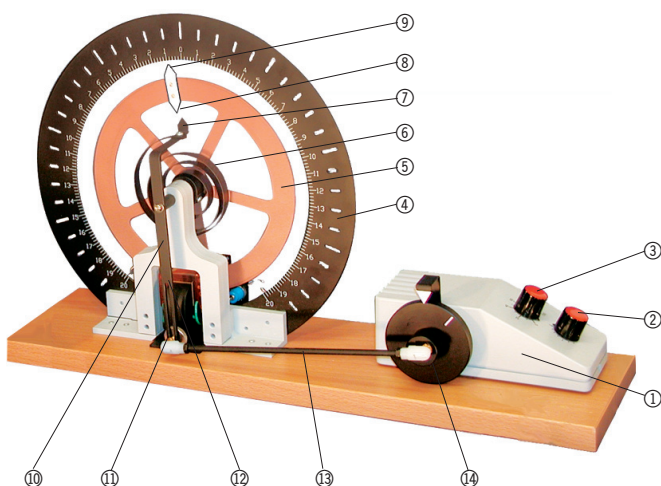
- A partir de estas mediciones se pueden representar gráficamente las características de resonancia, trazando la amplitud en función de la tensión del motor.
- A partir del valor promedio del ancho de los gráficos se puede obtener la frecuencia de resonancia.

Curvas de resonancia

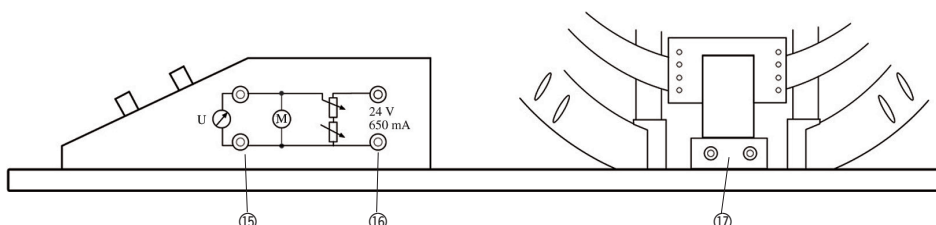
## Pêndulo de torção segundo Prof. Pohl 1002956

### Instruções para o uso

06/18 ALF



- ① Motor do excitador
- ② Botão rotativo para o ajuste fino da tensão do excitador
- ③ Botão rotativo para o ajuste grosseiro da tensão do excitador
- ④ Anel graduado
- ⑤ Corpo pendular
- ⑥ Mola caracol
- ⑦ Indicador da situação de fase do excitador
- ⑧ Indicador da situação de fase do corpo pendular
- ⑨ Indicador do ângulo de oscilação do corpo pendular
- ⑩ Excitador
- ⑪ Freio de corrente parasita
- ⑫ Fresta de controle e parafuso para o ajuste da amplitude do excitador
- ⑬ Vara para impulso
- ⑭ Roda de acionamento com excêntrico
- ⑮ Tomadas de segurança de 4 mm para a medição da tensão do excitador
- ⑯ Tomadas de segurança de 4 mm para a alimentação do motor do excitador
- ⑰ Tomadas de segurança de 4 mm para a alimentação do freio de corrente parasita



O pêndulo de torção serve para a análise de oscilações livres, forçadas e caóticas em diferentes casos de amortecimento.

#### Temas para experiências:

- Vibrações de torção livres em diferentes amortecimentos (queda na oscilação com amortecimento moderado, oscilação aperiódica e queda aperiódica da limitação)
- Oscilações forçadas e suas curvas de ressonância em vários casos de amortecimentos
- Transição física entre excitador e ressonador com queda de ressonância
- Oscilações de torção caóticas
- Determinação estática da grandeza de referência D
- Determinação dinâmica do momento de inércia J

#### 1. Indicações de segurança

- Ao retirar o pêndulo de torção da sua embalagem, nunca o pegue pelo anel graduado! Podem ocorrer

danos! Sempre retire o aparelho com o dispositivo previsto para isto! (Interior da embalagem).

- Para transportar o pêndulo de torção, sempre pegar o aparelho pela base.
- Não ultrapassar a tensão de alimentação máxima admitida do motor do excitador (24 V DC).
- O pêndulo de torção não deve ser sujeito a qualquer esforço físico desnecessário.

#### 2. Descrição, dados técnicos

O pêndulo de torção segundo Prof. Pohl consiste num sistema oscilatório montado sobre uma placa base de madeira e um motor elétrico. O sistema oscilatório consiste numa roda de cobre com rolamento (5), a qual está conectada com a vara do excitador por meio de uma mola espiral (6) que por sua vez fornece o momento de restituição. Para a excitação do pêndulo de torção, utiliza-se um motor de corrente contínua com número de rotações ajustável de modo aproximado ou preciso, o qual expande e comprime a mola espiral

numa seqüência periódica através de um excêntrico (14) com uma vara de impulso (13), levando assim a roda de cobre a oscilar. Para o amortecimento é utilizado um freio de corrente parasita eletromagnético (11). Um anel graduado (4) com frestas e uma escala com divisões de 2 mm envolve o sistema oscilatório; indicadores encontram-se no excitador e no ressoador. O aparelho também pode ser utilizado para a projeção de sombras em demonstrações.

Frequência própria: aprox. 0,5 Hz.

Frequência do excitador: 0 até 1,3 Hz (ajustável sem escalonamento)

Conexões:

motor: máx. 24 V DC, 0,7 A, por tomadas de segurança de 4 mm

freio de corrente parasita: 0 até 20 V DC, máx. 2 A, por tomadas de segurança de 4 mm

Anel graduado: 300 mm Ø  
Medidas: 400 mm x 140 mm x 270 mm  
Massa: 4 kg

## 2.1 Fornecimento

- 1 pêndulo de torção
- 2 massas adicionais de 10 g
- 2 massas adicionais de 20 g

## 3. Fundamentos teóricos

### 3.1 Símbolos utilizados nas fórmulas

D	=	Grandeza de referência angular
J	=	Momento de inércia da massa
M	=	Momento de torção de restituição
T	=	Duração do período
$T_0$	=	Duração do período do sistema sem amortecimento
$T_d$	=	Duração do período do sistema com amortecimento
$\widehat{M}_E$	=	Amplitude do momento de torção do excitador
b	=	Momento do amortecimento
n	=	Número de períodos
t	=	Tempo
$\Lambda$	=	Decremento logarítmico
$\delta$	=	Constante de amortecimento
$\varphi$	=	Deslocamento angular
$\widehat{\varphi}_0$	=	Amplitude no tempo $t = 0$ s
$\widehat{\varphi}_n$	=	Amplitude após n períodos
$\widehat{\varphi}_E$	=	Amplitude do excitador
$\widehat{\varphi}_S$	=	Amplitude do sistema
$\omega_0$	=	Frequência própria do sistema oscilatório
$\omega_d$	=	Frequência própria do sistema amortecido
$\omega_E$	=	Frequência circular do excitador

$\omega_{E\ res}$  = Frequência circular para a amplitude máx.

$\Psi_{0S}$  = Ângulo de fase do sistema

### 3.2 Oscilações de torção harmônicas

Uma oscilação de torção harmônica se dá quando a força de restituição é proporcional ao deslocamento angular. Nas oscilações de torção harmônicas, o momento de torção de reação é proporcional ao deslocamento angular  $\varphi$ :

$$M = D \cdot \varphi$$

O fator de proporcionalidade D (grandeza de referência angular) pode ser calculado através da medição do deslocamento angular e do momento deslocador.

A frequência própria circular do sistema  $\omega_0$  resulta das medições da duração do período T a partir de

$$\omega_0 = 2 \pi / T$$

e do momento de inércia da massa J a partir de

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}$$

### 3.3 Oscilações de torção livres amortecidas

Num sistema oscilatório no qual energia é perdida por causa de perdas por atrito sem que esta energia seja compensada por aporte externo de energia, a amplitude diminui constantemente, ou seja, a oscilação é amortecida.

Enquanto isso, o momento de amortecimento b é proporcional à velocidade angular  $\dot{\varphi}$ .

A partir do equilíbrio de momentos de torção resulta a equação de movimento

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = 0$$

Para a oscilação sem amortecimento vale  $b = 0$

Se a oscilação no tempo  $t = 0$  s começa com a amplitude máxima  $\widehat{\varphi}_0$  a solução da equação diferencial com um amortecimento não muito forte resulta em ( $\delta^2 < \omega_0^2$ ) (caso oscilatório)

$$\varphi = \widehat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

$\delta = b/2J$  é a constante de amortecimento e

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

é a frequência própria do sistema amortecido.

No caso de um amortecimento forte ( $\delta^2 > \omega_0^2$ ) o sistema não oscila, mais se arrasta para o ponto de descanso (caso de arraste).

A duração de período  $T_d$  do sistema oscilatório amortecido só varia muito pouco com relação ao valor  $T_0$  do sistema oscilatório sem amortecimento.

Pela introdução de  $t = n \cdot T_d$  na equação

$$\varphi = \widehat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

e a amplitude após n períodos  $\varphi = \widehat{\varphi}_n$  obtém-se com a relação  $\omega_d = 2 \pi / T_d$

$$\frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_0} = e^{-n \cdot \delta \cdot T_d}$$

e a partir disso o decaimento logarítmico  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \delta \cdot T_d = \frac{1}{n} \cdot \ln \left[ \frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_0} \right] = \ln \left[ \frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_{n+1}} \right]$$

Pela introdução de  $\delta = \Lambda / T_d$ ,  $\omega_0 = 2\pi / T_0$  e  $\omega_d = 2\pi / T_d$  na equação

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

obtem-se:

$$T_d = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}$$

pele qual a duração de período  $T_d$  pode ser calculada exatamente se o valor  $T_0$  é conhecido.

### 3.4 Oscilações de torção forçadas

No caso de oscilações de torção forçadas, um momento de torção variável periodicamente com uma função seno age do exterior sobre o sistema oscilatório. Completa-se esse momento do excitador na equação de movimento

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = \widehat{M}_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t)$$

Depois da iniciação da oscilação, o pêndulo de torção oscila num estado estacionário com a mesma frequência circular que o excitador, sendo que não se encontra defasado nem com  $\omega_E$  ou contra  $\omega_0$ .  $\Psi_{05}$  é o ângulo de fase do sistema, a defasagem entre o sistema oscilatório e o excitador.

$$\varphi = \widehat{\varphi}_S \cdot \sin(\omega_E \cdot t - \Psi_{05})$$

Para a amplitude do sistema  $\widehat{\varphi}_S$  é válido

$$\widehat{\varphi} = \frac{\widehat{M}_E}{J \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \cdot \omega_E^2}}$$

Para a relação entre a amplitude do sistema e a amplitude do excitador é válido

$$\frac{\widehat{\varphi}_S}{\widehat{\varphi}_E} = \frac{\widehat{M}_E}{J \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2}}$$

Nas oscilações sem amortecimento, a amplitude, em caso de ressonância ( $\omega_E$  igual a  $\omega_0$ ) cresce teoricamente infinitamente e leva ao "colapso por ressonância". Nas oscilações amortecidas e com amortecimento não muito forte a amplitude do sistema atinge seu máximo, sendo que a frequência circular do excitador  $\omega_{E_{res}}$  é menor do que a frequência própria do sistema. Esta

frequência resulta de

$$\omega_{E_{res}} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}}$$

Com amortecimento forte não há aumento excessivo de amplitude.

Para o ângulo de fase do sistema  $\Psi_{05}$  é válido

$$\Psi_{05} = \arctan \left( \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

Para  $\omega_E = \omega_0$  (ressonância), o ângulo de fase do sistema  $\Psi_{05} = 90^\circ$ . Isto é válido também para  $\delta = 0$  com a extrapolação correspondente.

No caso das oscilações amortecidas ( $\delta > 0$ ) e  $\omega_E < \omega_0$  resulta  $0^\circ \leq \Psi_{05} \leq 90^\circ$ , para  $\omega_E > \omega_0$  é válido  $90^\circ \leq \Psi_{05} \leq 180^\circ$ .

No caso de oscilações sem amortecimento ( $\delta = 0$ ) é válido  $\Psi_{05} = 0^\circ$  com  $\omega_E < \omega_0$  e  $\Psi_{05} = 180^\circ$  para  $\omega_E > \omega_0$ .

## 4. Utilização

### 4.1 Oscilações de torção livres amortecidas

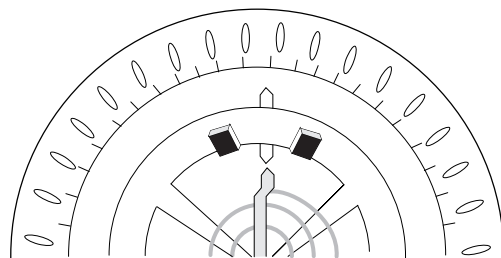
- Conectar o freio de corrente parasita com a saída para tensão ajustável do transformador de alimentação do pêndulo de torção.
- Conectar o amperímetro com o circuito elétrico.
- Determinar a constante de amortecimento dependendo da corrente.

### 4.2 Oscilações de torção forçadas

- Conectar as tomadas de conexão (16) do motor do excitador com a saída de tensão fixa do transformador do pêndulo de torção.
- Conectar o voltímetro com as tomadas de conexão (15) do motor do excitador.
- Determinar a amplitude de oscilação em relação de dependência com a frequência do excitador ou com a tensão de alimentação.
- Caso seja necessário, conectar o freio de corrente parasita com a saída de tensão ajustável do transformador do pêndulo de torção.

### 4.3 Oscilações caóticas

- Para a produção de oscilações caóticas, encontram-se 4 massas adicionais, estas modificam o momento de restauração linear do pêndulo de torção.
- Para tal, aparafusar as massas adicionais no corpo pendular (5).



## 5. Exemplos de experiências

### 5.1 Oscilações de torção livres amortecidas

- Para determinar o decaimento logarítmico  $\Lambda$ , medem-se e estabelece-se a média das amplitudes em várias operações. Para tal, regista-se o balanço do pêndulo na escala em duas séries de medições, a cada vez com leitura à esquerda e à direita.
- O ponto inicial do pêndulo encontrava-se em 15 ou  $-15$  na escala. Cinco deslocamentos foram registrados.
- Da relação entre as amplitudes, obtém-se  $\Lambda$  com a fórmula

$$\Lambda = \ln \left[ \frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_{n+1}} \right]$$

n	$\widehat{\varphi} -$				$\widehat{\varphi} +$			
0	-15	-15	-15	-15	15	15	15	15
1	-14,8	-14,8	-14,8	-14,8	14,8	14,8	14,8	14,8
2	-14,4	-14,6	-14,4	-14,6	14,4	14,4	14,6	14,4
3	-14,2	-14,4	-14,0	-14,2	14,0	14,2	14,2	14,0
4	-13,8	-14,0	-13,6	-14,0	13,8	13,8	14,0	13,8
5	-13,6	-13,8	-13,4	-13,6	13,4	13,4	13,6	13,6

n	$\emptyset \widehat{\varphi} -$	$\emptyset \widehat{\varphi} +$	$\Lambda -$	$\Lambda +$
0	-15	15		
1	-14,8	14,8	0,013	0,013
2	-14,5	14,5	0,02	0,02
3	-14,2	14,1	0,021	0,028
4	-13,8	13,8	0,028	0,022
5	-13,6	13,5	0,015	0,022

- O valor obtido para  $\Lambda$  é  $\Lambda = 0,0202$ .
- Para duração de oscilação  $T$  do pêndulo é válido  $t = n \cdot T$ . Para tal, medir o tempo par 10 oscilações com um cronômetro e calcular  $T$ .

$$T = 1,9 \text{ s}$$

- A partir destes valores pode-se determinar a constante de amortecimento  $\delta$  com  $\delta = \Lambda / T$ .

$$\delta = 0,0106 \text{ s}^{-1}$$

- Para a frequência própria  $\omega$  é válido

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \delta^2}$$

$$\omega = 3,307 \text{ Hz}$$

### 5.2 Oscilações de torção livres amortecidas

- Para determinar a constante de amortecimento  $\delta$  em relação de dependência com a corrente  $I$  através do imã eletromagnético, foi realizado o mesmo ensaio com o freio de corrente parasita ligado com  $I = 0,2 \text{ A}$ ,  $0,4 \text{ A}$  e  $0,6 \text{ A}$ .

#### I = 0,2 A

n	$\widehat{\varphi} -$				$\emptyset \widehat{\varphi} -$	$\Lambda -$
0	-15	-15	-15	-15	-15	
1	-13,6	-13,8	-13,8	-13,6	-13,7	0,0906
2	-12,6	-12,8	-12,6	-12,4	-12,6	0,13
3	-11,4	-11,8	-11,6	-11,4	-11,5	0,0913
4	-10,4	-10,6	-10,4	-10,4	-10,5	0,0909
5	9,2	-9,6	-9,6	-9,6	-9,5	0,1

- Com  $T = 1,9 \text{ s}$  e média de  $\Lambda = 0,1006$  resulta a constante de amortecimento:  $\delta = 0,053 \text{ s}^{-1}$

#### I = 0,4 A

n	$\widehat{\varphi} -$				$\emptyset \widehat{\varphi} -$	$\Lambda -$
0	-15	-15	-15	-15	-15	
1	-11,8	-11,8	-11,6	-11,6	-11,7	0,248
2	-9,2	-9,0	-9,0	-9,2	-9,1	0,25
3	-7,2	-7,2	-7,0	-7,0	-7,1	0,248
4	-5,8	-5,6	-5,4	-5,2	-5,5	0,25
5	-4,2	-4,2	-4,0	-4,0	-4,1	0,29

- Com  $T = 1,9 \text{ s}$  e média de  $\Lambda = 0,257$  resulta a constante de amortecimento:  $\delta = 0,135 \text{ s}^{-1}$

#### I = 0,6 A

n	$\widehat{\varphi} -$				$\emptyset \widehat{\varphi} -$	$\Lambda -$
0	-15	-15	-15	-15	-15	
1	-9,2	-9,4	-9,2	-9,2	-9,3	0,478
2	-5,4	-5,2	-5,6	-5,8	-5,5	0,525
3	-3,2	-3,2	-3,2	-3,4	-3,3	0,51
4	-1,6	-1,8	-1,8	-1,8	-1,8	0,606
5	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	0,81

- Com  $T = 1,9 \text{ s}$  e média de  $\Lambda = 0,5858$  resulta a constante de amortecimento:  $\delta = 0,308 \text{ s}^{-1}$

### 5.3 Oscilações de torção forçadas

- Para determinar amplitude de oscilação dependendo da frequência do excitador ou da tensão de alimentação regista-se a oscilação máxima do corpo pendular.

#### T = 1,9 s

Tensão do motor V	$\widehat{\varphi}$
3	0,8
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	3,3
7,6	20,0
8	16,8
9	1,6
10	1,1

- A frequência circular do sistema  $\omega_0$  obtém-se pela medição da duração de período T  

$$\omega_0 = 2 \pi/T = 3,3069 \text{ Hz}$$
- Com uma tensão de motor de 7,6 V ocorre a maior distância angular, ou seja, ocorre o caso de ressonância.
- Logo foi efetuado o mesmo ensaio com o freio de corrente parasita ligado com I = 0,2 A, 0,4 A e 0,6 A.

**I = 0,2 A**

Tensão do motor V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,7
7	2,9
7,6	15,2
8	4,3
9	1,8
10	1,1

**I = 0,4 A**

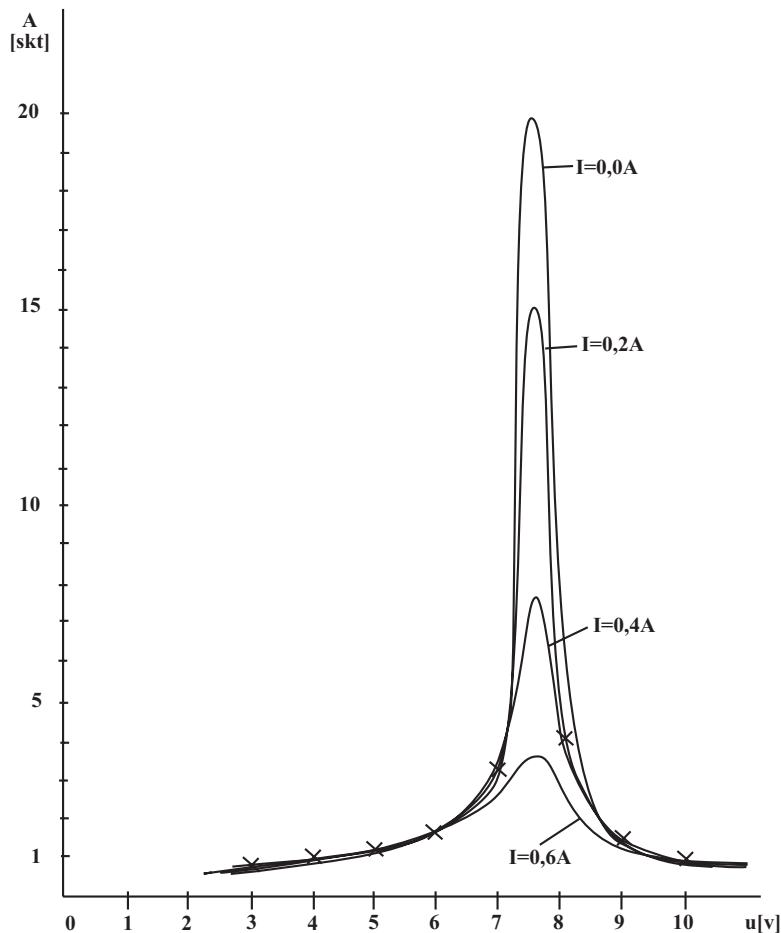
Tensão do motor V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1

5	1,3
6	1,8
7	3,6
7,6	7,4
8	3,6
9	1,6
10	1,0

**I = 0,6 A**

Tensão do motor V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	2,8
7,6	3,6
8	2,6
9	1,3
10	1,0

- A partir destas medições pode-se representar as curvas de ressonância de forma gráfica integrando as amplitudes dependendo da tensão do motor.
- Pela amplitude dos valores médios do gráfico pode-se determinar graficamente a frequência de ressonância.



Curvas de ressonância